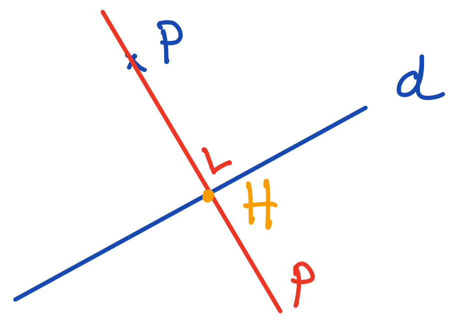
3.1.18 Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(-6;4)$ sur la droite d d'équation $4x = 5y - 3$.

$(d): \quad 4x - 5y + 3 = 0$

$P(-6;4)$

1ère méthode :



On cherche la perpendiculaire p issue de P sur d, puis l'intersection de d et de p.

$(p): \quad 5x + 4y + c = 0$

par $P(-6;4)$: $\quad -30 + 16 + c = 0 \Rightarrow c = 14$

$(p): \quad 5x + 4y + 14 = 0$

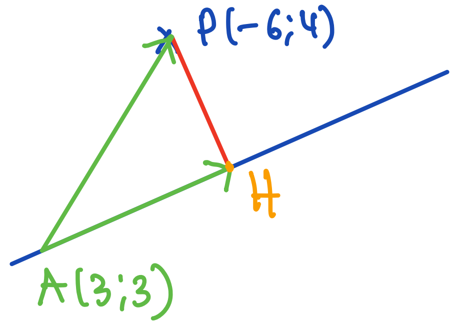
et finalement l'intersection :

$$\begin{cases} 5x + 4y = -14 \\ 4x - 5y = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} y & x \\ \cdot 5 & \cdot 4 \\ \cdot 4 & \cdot(-5) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 41x = -82 \\ 41y = -41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Projection $\quad H(-2;-1)$

$2^{\text{ème}}$ méthode (avec les vecteurs) :



$A(3;3) \in d$ (choisi au hasard)

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\overrightarrow{AH} = \dfrac{-45+4}{41} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{-41}{41} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H(-2;-1)$$