3.1.22 Déterminer les équations cartésiennes des médiatrices du triangle de sommets $A(1;8)$, $B(3;4)$, $C(-6;1)$, ainsi que les coordonnées du centre et le rayon de son cercle circonscrit.

1) médiatrice de AB: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ u } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

milieu de AB : $C'(2;6)$

(m_{AB}): $x - 2y + c = 0$; par C': $2 - 12 + c = 0 \Rightarrow c = 10$

(m_{AB}): $x - 2y + 10 = 0$

2) médiatrice de AC: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ u } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

milieu de AC : $B'\left(-\frac{5}{2} ; \frac{9}{2}\right)$

(m_{AC}): $x + y + c = 0$; par B': $-\frac{5}{2} + \frac{9}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -2$

(m_{AC}): $x + y - 2 = 0$

3) médiatrice de BC: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ u } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

milieu de BC : $A'\left(-\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$

(m_{BC}): $3x + y + c = 0$; par A' : $-\frac{9}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Rightarrow c = 2$

(m_{BC}) : $3x + y + 2 = 0$

4) centre du cercle circonscrit : $m_{AB} \cap m_{AC} = \{K\}$

$$\begin{cases} x - 2y = -10 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} y & x \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \\ \cdot 2 & \cdot 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -6 \\ 3y = 12 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow K(-2; 4)$$

5) rayon du cercle : $\|\overrightarrow{AK}\|$

$$\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{AK}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$