3.2.5 Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants :

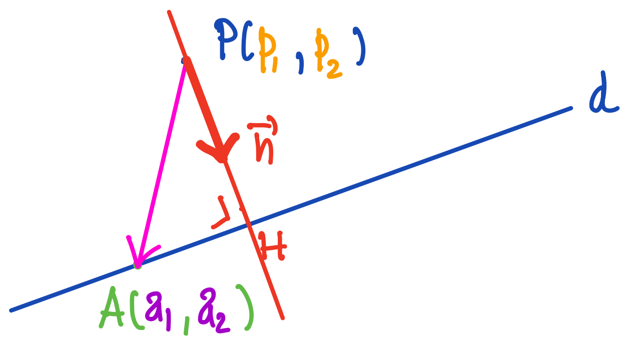
a) $P(2;-1)$ $\quad d : 4x + 3y + 10 = 0$

b) $P(0;-3)$ $\quad d : 5x = 12y + 23$ $\quad 5x - 12y - 23 = 0$

c) $P(-2;3)$ $\quad d : 4y = 3x - 2$ $\quad 3x - 4y - 2 = 0$

d) $P(1;-2)$ $\quad d : x = 2y + 5$ $\quad x - 2y - 5 = 0$

Distance d'un point à une droite



(d): $ax + by + c = 0$

$P(p_1, p_2)$

Calculons la distance du point P à la droite d.

Soit $A(a_1, a_2)$ sur d.

On a $\quad a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c = 0 \Rightarrow c = -(a \cdot a_1 + b \cdot a_2)$.

Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp d$

La projection de $\overrightarrow{PA}$ sur $\vec{n}$ donne la distance cherchée.

$$\delta(P,d) = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = (a_1 - p_1) \cdot a + (a_2 - p_2) b$$

$$= \underbrace{a_1 a + a_2 b}_{-c} - (p_1 a + p_2 b) = -(a p_1 + b p_2 + c)$$

Ainsi $\delta(P,d) = \dfrac{|a p_1 + b p_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

a) $\delta(P,d) = \dfrac{|4\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$

b) $\delta(P,d) = \dfrac{|5\cdot 0 - 12\cdot(-3) - 23|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \dfrac{13}{13} = 1$

c) $\delta(P,d) = \dfrac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 3 - 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$

d) $\delta(P,d) = \dfrac{|1 - 2\cdot(-2) - 5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{5}} = 0$