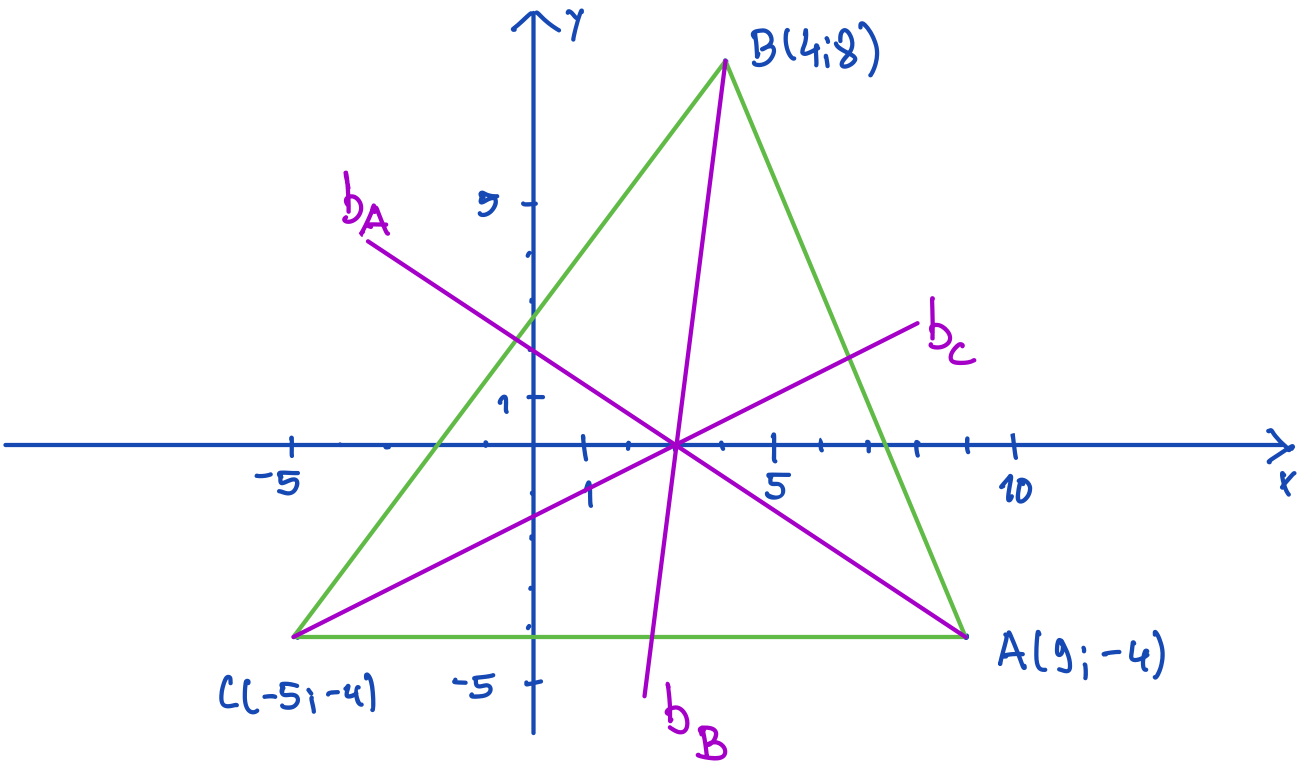
Soit le triangle de sommets $A(9;-4)$, $B(4;8)$ et $C(-5;-4)$.

a) Écrire l'équation des trois bissectrices intérieures de ce triangle.

b) Calculer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans ce triangle.

c) Calculer le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.



a) Il faut trouver les équations des côtés du triangle.

$$(AB) : \frac{y+4}{x-9} = \frac{8+4}{4-9} = \frac{12}{-5}$$

$$\Rightarrow \quad 12(x-9) = -5(y+4)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{12x + 5y - 88 = 0} \quad : (AB)$$

$\underline{(AC) : \quad y = -4}$ (la droites est horizontale $A(9;-4)$ et $C(-5;-4)$)

$$(BC) : \frac{y-8}{x-4} = \frac{-4-8}{-5-4} = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow \quad 4(x-4) = 3(y-8)$ $\qquad -16$

$\Leftrightarrow \quad \underline{4x - 3y + 8 = 0 \quad : (BC)}$

- Bissectrice issue de A (pente négative cf figure)

$$\frac{12x+5y-88}{\sqrt{12^2+5^2}} = \pm \frac{y+4}{1}$$

"+" : $12x+5y-88 = 13(y+4)$

$12x - 8y - 140 = 0$

$6x - 4y - 70 = 0$

"−" : $12x+5y-88 = -13(y+4)$

$12x + 18y - 36 = 0$

$\underline{(b_A) : 2x + 3y - 6 = 0}$

- Bissectrice issue de B (pente positive cf figure)

$$\frac{12x+5y-88}{\sqrt{12^2+5^2}} = \pm \frac{4x-3y+8}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

"+" : $5(12x+5y-88) = 13(4x-3y+8)$

$8x + 64y - 544 = 0$

$x + 8y - 68 = 0$

$5(12x+5y-88) = -13(4x-3y+8)$

$112x - 14y - 336 = 0$

$\underline{(b_B) : 8x - y - 24 = 0}$

- Bissectrice issue de C (pente positive cf figure)

$$\frac{y+4}{1} = \pm \frac{4x-3y+8}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

"+" $4x - 3y + 8 = 5(y+4)$

$4x - 8y - 12 = 0$

$\underline{(b_C) : x - 2y - 3 = 0}$

"−" : $4x - 3y + 8 = -5(y+4)$

$4x + 2y + 28 = 0$

$2x + y + 14 = 0$

b) On cherche, par exemple, l'intersection de b_A et b_B.

$$\begin{array}{ll} (b_A): \\ (b_B): \end{array} \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 3y &= 6 \\ 8x - y &= 24 \end{array} \right. \begin{array}{c|c|c} & x & y \\ & \cdot 4 & \cdot 1 \\ & \cdot(-1) & \cdot 3 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 13y = 0 \\ 26x = 78 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \underline{I(3;0)}$$

c) On calcule, par exemple, la distance du centre I à la droite AB.

$$\text{rayon} = \frac{|12 \cdot 3 + 5 \cdot 0 - 88|}{13} = \frac{|36 - 88|}{13} = \frac{52}{13} = 4$$