# Géométrie 1 (2M)

## Ex 1

a) $3\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15-16+1/2\\-9+16+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\7\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-8+1/4\\-3+8+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11/4\\5\end{pmatrix}$

c) $-5\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-25 & -12 & -4\\15 & +12 & +0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-41\\27\end{pmatrix}$

## Ex 2

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{a} = k\vec{b}$. On note $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, alors

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0}$$

a) $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-2\\m+4\end{pmatrix} \Leftrightarrow 1\cdot(m+4) = -2\cdot 5 \Leftrightarrow m+4 = -10$

$\Leftrightarrow \underline{m = -14}$

b) $\begin{pmatrix}m\\m+4\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}3\\m-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow m(m-1) = 3(m+4)$

$\Leftrightarrow m^2 - m = 3m + 12$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (m-6)(m+2) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{m = 6 \text{ ou } m = -2}$

## Ex 3

Soit $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ deux points du plan. Alors

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\end{pmatrix}$

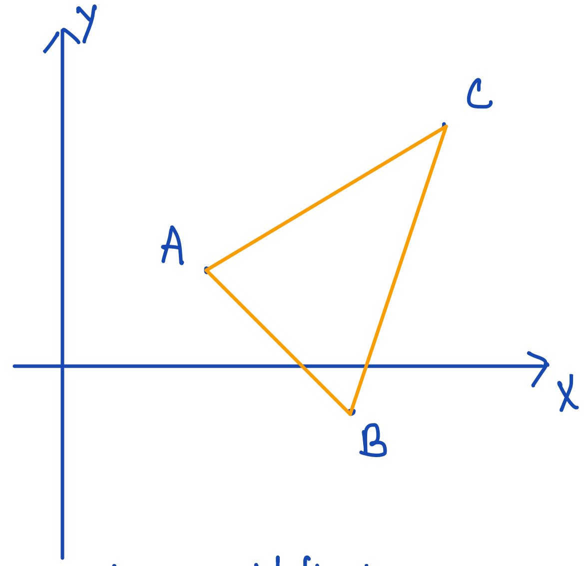



Figure d'étude

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

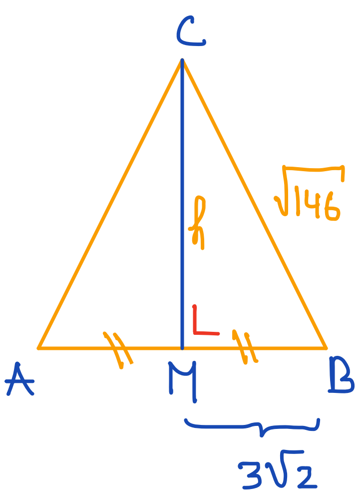
Calculons les normes de ces trois vecteurs :

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{11^2 + 5^2} = \sqrt{121 + 25} = \sqrt{146}$

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{5^2 + 11^2} = \sqrt{25 + 121} = \sqrt{146}$

Comme $\|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\|$, le $\Delta ABC$ est isocèle de sommet C.




$\frac{1}{2} \cdot AB = AM = 3\sqrt{2}$

Calculons par Pythagore la hauteur de ce triangle :

hauteur : $h = \sqrt{\sqrt{146}^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{146 - 18}$

$= \sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$

Aire du $\Delta$ : $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$ : $\frac{1}{2} 6\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$= 48$

$\Rightarrow \text{Aire}(\Delta ABC) = 48$

## Norme d'un vecteur :

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

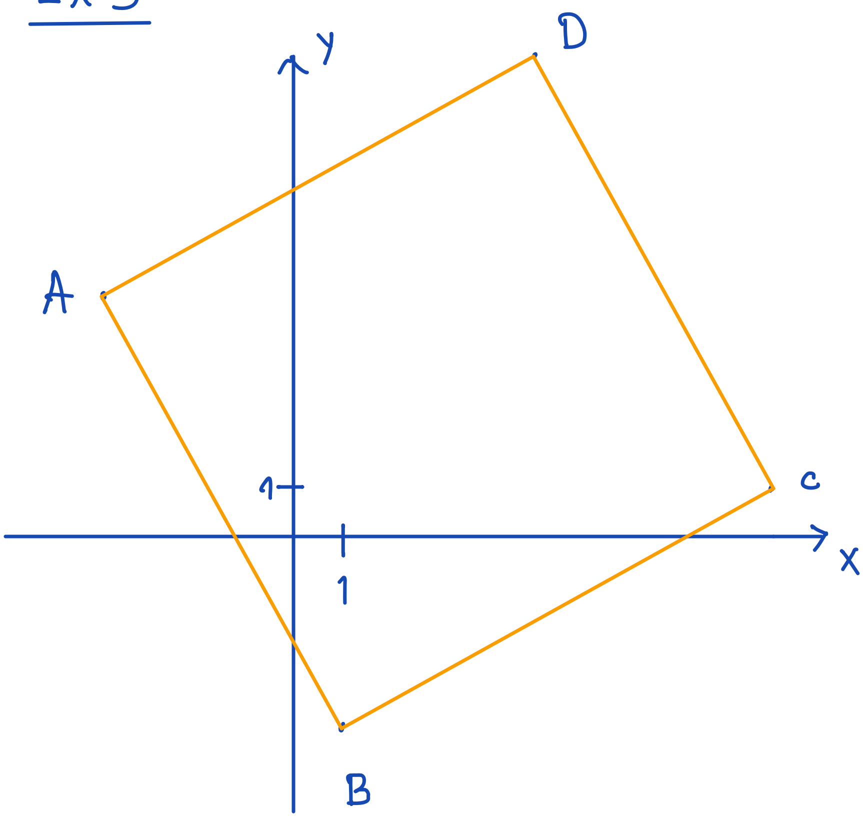
### Ex 4

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. On note $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ le produit scalaire de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}$$

$$\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \iff 3m - 10 = 0 \iff m = 10/3$$

### Ex 5




Sur cette figure, il semble que le quadrilatère ABCD soit un carré.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\|\vec{AB}\| = \sqrt{106}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\|\vec{BC}\| = \sqrt{106}$

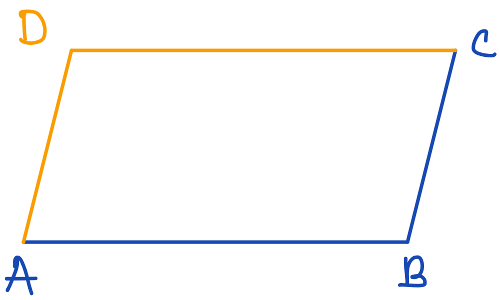
$\vec{CD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\|\vec{CD}\| = \sqrt{106}$

$\vec{DA} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\|\vec{DA}\| = \sqrt{106}$

Comme $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \|\vec{CD}\| = \|\vec{DA}\|$, le quadrilatère ABCD est un losange. Montrons qu'il a un angle droit : $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 5 \cdot 9 + (-9) \cdot 5 = 45 - 45 = 0$.

Un losange avec un angle droit est un carré.
Donc le quadrilatère ABCD est un carré.

## Ex 6

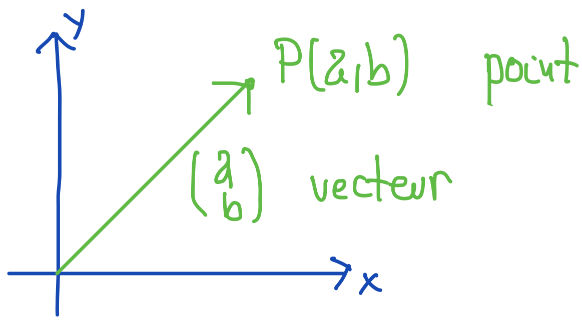



$$\vec{BC} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \underbrace{\vec{AD}}_{\vec{BC}} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix} \Rightarrow D(-8;4)$$

$P(a,b) \Leftrightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

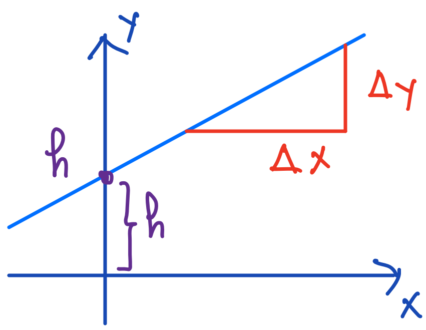



## Ex 7

Fonction affine : $f(x) = mx + h$

pente

ordonnée à l'origine




$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a) 1ère méthode : $y = mx + h$

$A(\underbrace{-2}_{x};\underbrace{2}_{y})$ : $2 = -2m + h$

$B(\underbrace{3}_{x};\underbrace{4}_{y})$ : $4 = 3m + h$

On résout le système d'équation :

$$\begin{cases} -2m + h = 2 \\ 3m + h = 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{array} \right. \iff \begin{cases} 5m = 2 \\ h = 2 + 2m \end{cases} \iff \begin{array}{l} m = 2/5 \\ h = 10/5 + 4/5 = 14/5 \end{array}$$

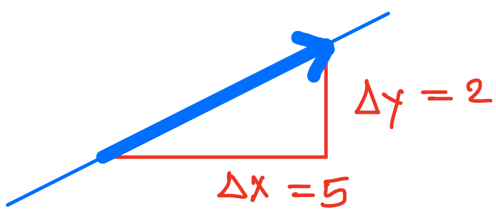
Ainsi $y = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$ ou $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$

<u>2ème méthode</u> : calcul de la pente : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{3-(-2)} = \frac{2}{5}$

calcul de l'ordonnée à l'origine : $2 = -2 \cdot \frac{2}{5} + h \Rightarrow h = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$

b) pente : $\frac{2}{5}$

c) La pente donne un tel vecteur : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{5} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$




$\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

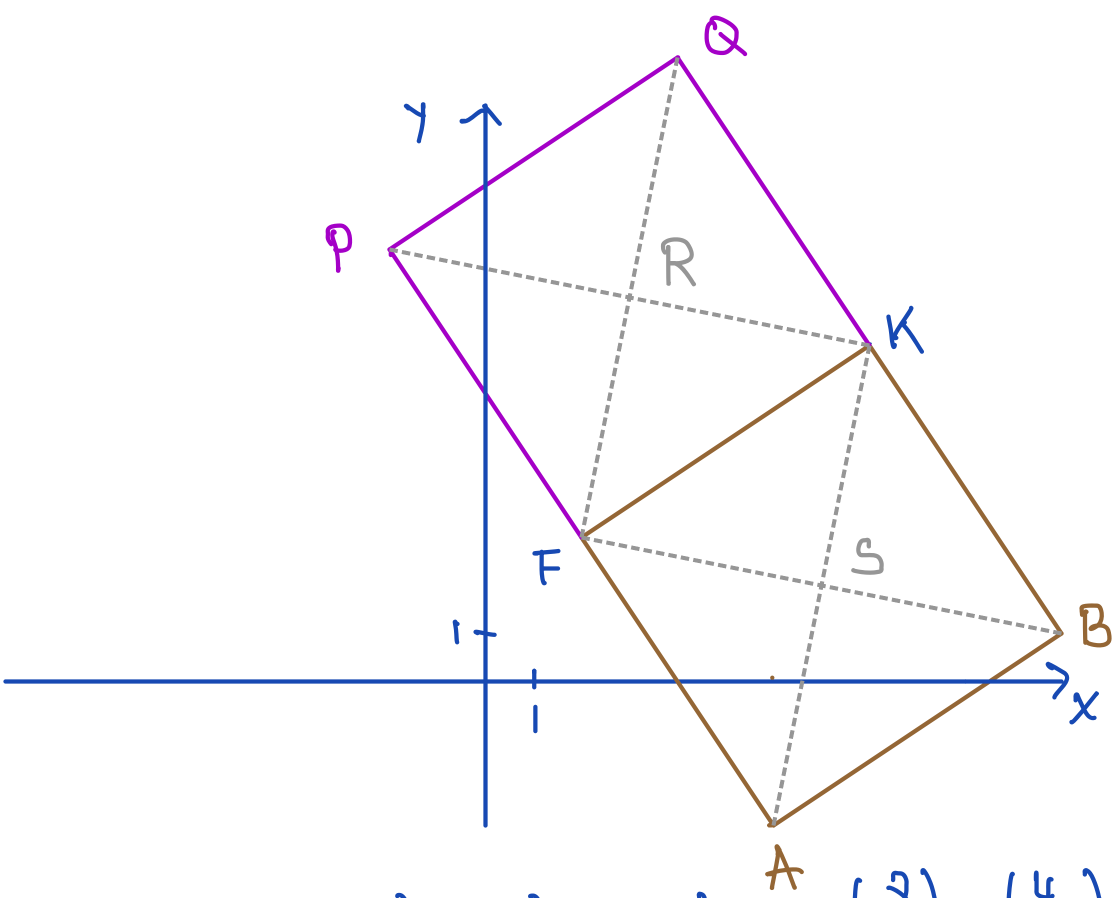
Vecteur directeur : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \iff \vec{d} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

<u>Ex 8</u>

Il y a 3 carrés possibles.

$\vec{FK} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\vec{KB}} \perp \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{KQ}} \perp \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$




① FKBA : $\vec{OB} = \vec{OK} + \vec{KB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B(12;1)$

$\vec{OA} = \vec{OF} + \vec{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A(6;-3)$

② FKQP : $\vec{OQ} = \vec{OK} + \vec{KQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(4;13)$

$\vec{OP} = \vec{OF} + \vec{KQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow P(-2;9)$

③ FRKS : R est le milieu de FQ : $R\left(\frac{2+4}{2}; \frac{3+13}{2}\right)$

$R(3;8)$

S est le milieu de FB :

$S\left(\frac{2+12}{2}; \frac{3+1}{2}\right) \Rightarrow S(7;2)$