Exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 + 6\,x - 56$.

►1. Résoudre les équations suivantes.

- **a)** $f\,(x) = 0$
- **b)** $f\,(x) = -56$
- **c)** $f\,(x) = -60{,}50$

►2. **a)** Dresser le tableau de signes de f.

►3. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes.

- **a)** Résoudre $f(x) \geqslant 0$.
- **b)** Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P\,(x) = -5\,x + 7\,x^2$ $\qquad$ $Q\,(x) = 64 + 48\,x + 9\,x^2$ $\qquad$ $R\,(x) = -2\,x + x^2 - 1$

Exercice 3

Factoriser les polynômes suivants :

►1. Factoriser $S(y) = 108y^2 + 108y + 27$ à l'aide d'une identité remarquable.

►2. $Q(y) = y^2 - 18y + 81$

►3. $R(x) = 44x^2 + 109x + 56$

►4. $P(y) = y^2 + y - 8$

Exercice 4

►1. Soit $E = x^3 - 15x^2 + 68x - 84$

- **a)** Vérifier si E possède une racine évidente.
- **b)** Factoriser E.

►2. Soit $F = -10x^3 + 3x^2 + 6x + 1$

- **a)** Vérifier si F possède une racine évidente.
- **b)** Factoriser F.

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

►1. $x^2 - 3x - 18 = 0$

►2. $-11y^2 - 48y + 35 = 0$

►3. $-x^2 + 3x - 10 = 0$

Exercice 6

►1. Étudier le signe du polynôme $P = x^2 - 4x$ sur $I = [0\ ;\ 5]$.

►2. Étudier le signe du polynôme $P = -70x^2 - 11x + 3$ sur $I = [-5\ ;\ 5]$.

►3. Étudier le signe du polynôme $P = -x^2 - 6$ sur $I = \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 + 6\,x - 56$.

▶**1.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $2\,(x+7)\,(x-4) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 7 = 0 &\text{ ou } x - 4 = 0 \\ x = -7 &\text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -7 et 4.

b) $f\,(x) = -56$ On remarque que la forme développée contient la constante -56 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= -56 \\ 2\,x^2 + 6\,x - 56 &= -56 \\ 2\,x^2 + 6\,x - 56 + 56 &= -56 + 56 \\ 2\,x^2 + 6\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 2\,x^2 + 6\,x &= 0 \\ 2\,x \times x + 6 \times x &= 0 \\ x\,(2\,x + 6) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } 2\,x + 6 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } 2\,x = -6 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-6}{2} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -3$.

c) $f\,(x) = -60{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-60{,}50$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= -60{,}50 \\ 2\,(x + 1{,}5)^2 - 60{,}50 &= -60{,}50 \\ 2\,(x + 1{,}5)^2 - 60{,}50 + 60{,}50 &= -60{,}50 + 60{,}50 \\ 2\,(x + 1{,}5)^2 &= 0 \\ (x + 1{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 1{,}5 &= 0 \\ x &= -1{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -1{,}5$.

▶2. **a)** *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 2\,(x+7)\,(x-4)$.

- Le premier facteur $x+7$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 7$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{7}{1} = -7$.
- Le second facteur $x-4$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -4$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$.

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x + 7$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) =$ $2\,(x+7)\,(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶3. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-7\right] \cup \left[4\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-60{,}50$. Le minimum de f est donc $-60{,}50$, et il est atteint pour $x = -1{,}5$.

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 7\,x^2 - 5\,x \\ &= -x \times (-7\,x + 5) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{5}{7}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 9\,x^2 + 48\,x + 64 \\ &= (3\,x)^2 + 2 \times 3\,x \times 8 + 8^2 \\ &= (3\,x + 8)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{\dfrac{-8}{3}}$

$R(x) = x^2 - 2\,x - 1$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -1$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ \Delta &= 4 - (-4) \\ \Delta &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 - \sqrt{8}}{2 \times 1} \\ x_1 &= \frac{2 - \sqrt{4} \times \sqrt{2}}{2} \\ x_1 &= \frac{\left(1 - \sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \\ x_1 &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2 + \sqrt{8}}{2 \times 1} \\ x_2 &= \frac{2 + \sqrt{4} \times \sqrt{2}}{2} \\ x_2 &= \frac{\left(1 + \sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \\ x_2 &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{1 - \sqrt{2}}$ et $\boxed{1 + \sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 3

►**1.** Factoriser $S(y) = 108y^2 + 108y + 27$

$$108y^2 + 108y + 27 = 27 \times \left[4y^2 + 4y + 1\right] = 27 \times \left[(2y)^2 + 2 \times 2y \times 1 + 1^2\right] = 27(2y + 1)^2$$

►**2.** Factoriser $Q(y) = y^2 - 18y + 81$
Je calcule $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 81 = 0$.
Comme $\Delta = 0$, $Q(y)$ a une seule racine $y_0 = \dfrac{-(-18)}{2 \times 1} = 9$.
On peut donc écrire $R(x) = (x - 9)^2$.

►**3.** Factoriser $R(x) = 44x^2 + 109x + 56$
Je calcule $\Delta = 109^2 - 4 \times 44 \times 56 = 2\,025$ et $\sqrt{2\,025} = 45$.
Comme $\Delta > 0$, $R(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-109 - \sqrt{2\,025}}{2 \times 44} &= \frac{-109 - \sqrt{2\,025}}{88}\\ &= \frac{-109 - 45}{88}\\ &= \frac{-154}{88}\\ &= \frac{-7_{\times 22}}{4_{\times 22}}\\ &= \frac{-7}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-109 + \sqrt{2\,025}}{2 \times 44} &= \frac{-109 + \sqrt{2\,025}}{88}\\ &= \frac{-109 + 45}{88}\\ &= \frac{-64}{88}\\ &= \frac{-8_{\times 8}}{11_{\times 8}}\\ &= \frac{-8}{11}\end{aligned}$$

Les racines de R sont $x_1 = \dfrac{-7}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-8}{11}$.
On peut donc écrire

$$R(x) = 44 \times \left(x - \left(-\frac{7}{4}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{8}{11}\right)\right) = 44 \times \left(x + \frac{7}{4}\right)\left(x + \frac{8}{11}\right)$$

►**4.** Factoriser $P(y) = y^2 + y - 8$
Je calcule $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 33$.
Comme $\Delta > 0$, $P(y)$ a deux racines :

$$\frac{-1 - \sqrt{33}}{2 \times 1} = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \qquad \frac{-1 + \sqrt{33}}{2 \times 1} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$$

Les racines de P sont $y_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{2}$.
On peut donc écrire

$$P(y) = \left(y - \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}\right)\left(y - \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}\right)$$

Corrigé de l'exercice 4

►**1.** Soit $E = x^3 - 15x^2 + 68x - 84)$

a) Comme $E(2) = 0$, on peut diviser E par $x - 2$

$$\begin{array}{rrrr|l} +1x^3 & -15x^2 & +68x & -84 & x-2 \\ \cline{5-5} -(+1x^3 & -2x^2) & & & x^2 - 13x + 42 \\ \cline{1-2} +0x^3 & -13x^2 & +68x & & \\ & -(-13x^2 & +26x) & & \\ \cline{2-3} & +0x^2 & +42x & -84 & \\ & & -(+42x & -84) & \\ \cline{3-4} & & +0 & & \end{array}$$

On a

$$x^3 - 15x^2 + 68x - 84 = \left(x^2 - 13x + 42\right) \times (x - 2)$$

b) On doit maintenant factoriser le polynôme $E_2 = x^2 - 13x + 42$
Je calcule $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 42 = 1$.
Comme $\Delta > 0$, $E_2(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-13)-\sqrt{1}}{2\times 1} &= \frac{13-\sqrt{1}}{2}\\ &= \frac{13-1}{2}\\ &= \frac{12}{2}\\ &= 6\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-13)+\sqrt{1}}{2\times 1} &= \frac{13+\sqrt{1}}{2}\\ &= \frac{13+1}{2}\\ &= \frac{14}{2}\\ &= 7\end{aligned}$$

Les racines de E_2 sont $x_1 = 6$ et $x_2 = 7$.
On ne peut pas factoriser $E_2(x)$.
On en conclue donc que $E = (x-2) \times (x^2 - 13x + 42) = (x-2)(x-6)(x-7)$

►2. Soit $F = -10x^3 + 3x^2 + 6x + 1)$

a) Comme $F(1) = 0$, on peut diviser F par $x - 1$

$$\begin{array}{rrrr|l} -10x^3 & +3x^2 & +6x & +1 & x-1 \\ \cline{5-5} -(-10x^3 & +10x^2) & & & -10x^2-7x-1 \\ \cline{1-2} +0x^3 & -7x^2 & +6x & & \\ & -(-7x^2 & +7x) & & \\ \cline{2-3} & +0x^2 & -1x & +1 & \\ & & -(-1x & +1) & \\ \cline{3-4} & & +0 & & \end{array}$$

On a

$$-10x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = \left(-10x^2 - 7x - 1\right) \times (x-1)$$

b) On doit maintenant factoriser le polynôme $F_2 = -10x^2 - 7x - 1$
Je calcule $\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-10) \times (-1) = 9$ et $\sqrt{9} = 3$.
Comme $\Delta > 0$, $F_2(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2\times(-10)} &= \frac{7+\sqrt{9}}{-20}\\ &= \frac{7+3}{-20}\\ &= \frac{10}{-20}\\ &= \frac{-1_{\times(-10)}}{2_{\times(-10)}}\\ &= \frac{-1}{2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2\times(-10)} &= \frac{7-\sqrt{9}}{-20}\\ &= \frac{7-3}{-20}\\ &= \frac{4}{-20}\\ &= \frac{-1_{\times(-4)}}{5_{\times(-4)}}\\ &= \frac{-1}{5}\end{aligned}$$

Les racines de F_2 sont $x_1 = \frac{-1}{2}$ et $x_2 = \frac{-1}{5}$.
On peut donc écrire

$$F_2(x) = -10 \times \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = -10 \times \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$$

On en conclue donc que $F = -10\,(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$

Corrigé de l'exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

▶1. $x^2 - 3x - 18 = 0$

Je calcule $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-3)-\sqrt{81}}{2\times 1} &= \frac{3-\sqrt{81}}{2}\\ &= \frac{3-9}{2}\\ &= \frac{-6}{2}\\ &= -3\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-3)+\sqrt{81}}{2\times 1} &= \frac{3+\sqrt{81}}{2}\\ &= \frac{3+9}{2}\\ &= \frac{12}{2}\\ &= 6\end{aligned}$$

Les racines de P sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 6$.

▶2. $-11y^2 - 48y + 35 = 0$

Je calcule $\Delta = (-48)^2 - 4 \times (-11) \times 35 = 3\,844$ et $\sqrt{3\,844} = 62$.

Comme $\Delta > 0$, $P(y)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-48)+\sqrt{3\,844}}{2\times(-11)} &= \frac{48+\sqrt{3\,844}}{-22}\\ &= \frac{48+62}{-22}\\ &= \frac{110}{-22}\\ &= -5\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-48)-\sqrt{3\,844}}{2\times(-11)} &= \frac{48-\sqrt{3\,844}}{-22}\\ &= \frac{48-62}{-22}\\ &= \frac{-14}{-22}\\ &= \frac{7_{\times(-2)}}{11_{\times(-2)}}\\ &= \frac{7}{11}\end{aligned}$$

Les racines de P sont $y_1 = -5$ et $y_2 = \dfrac{7}{11}$.

▶3. $-x^2 + 3x - 10 = 0$

Je calcule $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = -31$.

Comme $\Delta < 0$, $P(x)$ n'a pas de racines.

Corrigé de l'exercice 6

▶1. Étudier le signe du polynôme $P = x^2 - 4x$ sur $I = [0\ ;\ 5]$.

Je calcule $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 16$ et $\sqrt{16} = 4$.

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-4)-\sqrt{16}}{2\times 1} &= \frac{4-\sqrt{16}}{2}\\ &= \frac{4-4}{2}\\ &= \frac{0}{2}\\ &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-4)+\sqrt{16}}{2\times 1} &= \frac{4+\sqrt{16}}{2}\\ &= \frac{4+4}{2}\\ &= \frac{8}{2}\\ &= 4\end{aligned}$$

Les racines de P sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	0		4		5
$P(x)$		$-$	0	$+$	

►2. Étudier le signe du polynôme $P = -70x^2 - 11x + 3$ sur $I = [-5\ ;\ 5]$.
Je calcule $\Delta = (-11)^2 - 4 \times (-70) \times 3 = 961$ et $\sqrt{961} = 31$.
Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-11)+\sqrt{961}}{2\times(-70)} &= \frac{11+\sqrt{961}}{-140}\\ &= \frac{11+31}{-140}\\ &= \frac{42}{-140}\\ &= \frac{-3_{\times(-14)}}{10_{\times(-14)}}\\ &= \frac{-3}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-11)-\sqrt{961}}{2\times(-70)} &= \frac{11-\sqrt{961}}{-140}\\ &= \frac{11-31}{-140}\\ &= \frac{-20}{-140}\\ &= \frac{1_{\times(-20)}}{7_{\times(-20)}}\\ &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

Les racines de P sont $x_1 = \frac{-3}{10}$ et $x_2 = \frac{1}{7}$.
Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-5		$-\frac{3}{10}$		$\frac{1}{7}$		5
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►3. Étudier le signe du polynôme $P = -x^2 - 6$ sur $I = \mathbb{R}$.
Je calcule $\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = -24$.
Comme $\Delta < 0$, $P(x)$ n'a pas de racines. Comme $\Delta < 0$, $P(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	