2M1 – Mercredi 5 octobre 2022 Nom & prénom : ....

Exp Log et Fonctions – TE 782B

Problème 1 (12 points)

Résoudre les équations suivantes.

a) $\log(x-4)+\log(x-2)=\log(30)-\log(2)$

b) $\log_2(x^2+56)=2\log_2(x+2)+1$

a) $(x-4)(x-2) = 15$

$x^2-6x-7=0$

$(x-7)(x+1)=0$

Vérif : $x=7$: $\log(3)+\log(5)=\log(15)$ ✓

$x=-1$: impossible $\log(-5)$

$S=\{7\}$

b) $\log(x^2+56)=\log(x+2)^2+\log_2(2)$

$x^2+56=2(x+2)^2$

$x^2+56=2x^2+8x+8$

$x^2+8x-48=0$

$(x+12)(x-4)=0$

Vérif : $x=-12$: impossible $\log(-10)$

$x=4$: $\log_2(72)\stackrel{?}{=}\underbrace{2\log(6)+\log_2(2)}_{\log(36\cdot 2)}$ ✓

$S=\{4\}$

Problème 2 (3 points)

La longueur en cm L d'un spécimen mâle d'une certaine espèce de requins dépend de son âge selon la formule de croissance de von Bertalanffy

$$L = 100 \cdot (1 - e^{-0.561 \cdot t})$$

a) Calculer la longueur d'un requin mâle de 4 ans.

b) Quel est l'âge d'un requin mâle mesurant 95 cm?

a) $L(4) = 100\left(1 - e^{-0{,}561 \cdot 4}\right) \cong 89{,}40$ [cm]

b) $100\left(1 - e^{-0{,}561\,t}\right) = 95$

$1 - e^{-0{,}561\,t} = 0{,}95$

$e^{-0{,}561\,t} = 0{,}05$

$t = \dfrac{\ln(0{,}05)}{-0{,}561}$

$t \cong 5{,}34$ [ans]

Problème 3 (6 points)

Dans certaines conditions, la pression atmosphérique (en mmHg) à une certaine altitude (en m) est donnée par une fonction exponentielle.

a) Si la pression au niveau de la mer est de 734 mmHg et de 726,37 mmHg à 95 m d'altitude, quelle sera la pression à 850 mètres ?

b) A quelle altitude la pression sera de 650 mmHg ?

a) $P(x) = P_0 e^{kt}$

$P(0) = P_0 = 734$

$P(95) = 734\, e^{95k} = 726{,}37$

$$k = \frac{\ln(726{,}37/734)}{95} \cong 0{,}00011$$

$P(850) = 734 \cdot e^{-0{,}00011 \cdot 850} \cong 668{,}48$ [mmHg]

b) $734 \cdot e^{-0{,}00011\, x} = 650$

$$x = \frac{\ln(650/734)}{-0{,}00011} \cong 1104{,}879 \text{ [m]}$$

[1104,93]

Problème 4 (6 points)

A 10 h ce matin, un échantillon de yogourt contenait 15000 bactéries. À la température de la pièce, le nombre de bactéries présentes dans cet échantillon quadruple toutes les 2 heures.

a) Déterminer la relation qui représente le nombre de bactéries B après t heures.

b) Si on considère que le yogourt n'est plus comestible à partir du moment où il contient 960000 bactéries et plus, après combien d'heures cela se produira-t-il?

a) $B(t) = 15000 \; 4^{\frac{t}{2}}$

b) $B(t) \geq 960'000$

$4^{t/2} = 64$

$\frac{t}{2} = \frac{\ln(64)}{\ln(4)} = \frac{\ln(4^3)}{\ln(4)} = 3$

$t = 6 \; [h]$

a) $B(t) = 15'000 \; e^{kt}$

$B(2) = 60'000 \Rightarrow e^{2k} = 4$

$k = \frac{\ln(4)}{2} = 0{,}693147$