

Problème	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points	10	7	3	4	9	4	5	42
Points obtenus								

Problème 1 (10 points)
 Déterminer l'ensemble de définition et le signe des trois fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 9}$

b) $f(x) = \sqrt{-4x + 20}$

c) $f(x) = 6x^2 - x - 2$

a)

$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$
 $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
 $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

x	-5	-3	2
f(x)	+	0	-
			0
			+

b)

condition : $-4x + 20 \geq 0$

$4x \leq 20$

$x \leq 5$

$ED(f) =]-\infty; 5]$

x	5
f(x)	+
	0
	/

c)

$f(x) = 6x^2 - x - 2 = (3x - 2)(2x + 1)$
 $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
f(x)	+	0
		-
	0	+

Problème 2 (7 points)

Déterminer l'ensemble de définition des deux fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 16}{2 - x}}$

b) $f(x) = \log(x^2 - 2x - 15)$

a) condition: $\frac{x^2 - 16}{2 - x} \geq 0$

x	-4	2	4
$x^2 - 16$	+ 0 -	- 0 +	- 0 +
$-x + 2$	+	+	0 -
$\frac{x^2 - 16}{-x + 2}$	+ 0 -	- 0 +	- 0 +

$$ED(f) =]-\infty; -4] \cup]2; 4]$$

b) condition: $x^2 - 2x - 15 > 0$

$$(x - 5)(x + 3) > 0$$

x	-3	5
$x^2 - 2x - 15$	+ 0 -	- 0 +

$$ED(f) =]-\infty; -3[\cup]5; +\infty[$$

Problème 3 (3 points)

Déterminer l'application réciproque de la fonction bijective suivante.

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$$

$$x \mapsto \frac{4x+3}{x-1}$$

On pose $y = \frac{4x+3}{x-1}$ et on détermine x .

$$(x-1) \cdot y = 4x+3$$

$$xy - y = 4x + 3$$

$$xy - 4x = y + 3$$

$$(y-4)x = y+3$$

$$x = \frac{y+3}{y-4}$$

L'application réciproque :

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \mapsto \frac{x+3}{x-4}$$

2) Injective : $a, b \in \mathbb{Z}$ tel

$$\Rightarrow 4a-5 = 4b$$

$$\Rightarrow f_a \text{ injective}$$

Surjective : non! il n'ex

$$\text{que } f_b(a) = 0.$$

$$\text{En effet : } 4a-5=0 \Leftrightarrow$$

b) Injective : $a, b \in [0, +\infty[$

$$\Rightarrow a^2+4 = b^2+4$$

$$(a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

(impossible) $\Rightarrow f_a$ injective

Surjective : Soit $a \in [4, +\infty[$

$$x^2+4 = a$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{a-4} \Rightarrow f_a$$

Problème 4 (4 points)

Déterminer les fonctions injectives ou surjectives.

a) $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto 4x - 5$

b) $f_4 : [0; +\infty[\rightarrow [4; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 + 4$

a) Injective : $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $f_1(a) = f_1(b)$

$$\Rightarrow 4a - 5 = 4b - 5 \Leftrightarrow a = b$$

$\Rightarrow f_1$ injective.

Surjective : non! il n'existe pas $a \in \mathbb{Z}$ tel que $f_1(a) = 0$.

En effet : $4a - 5 = 0 \Leftrightarrow 4a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4} \notin \mathbb{Z}$

b) Injective : $a, b \in [0; +\infty[$ tels que $f_4(a) = f_4(b)$

$$\Rightarrow a^2 + 4 = b^2 + 4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow$$

$$(a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow a = b \quad (a = -b \text{ est impossible}) \Rightarrow f_4 \text{ injective.}$$

Surjective : Soit $a \in [4; +\infty[$. On a

$$x^2 + 4 = a \Leftrightarrow x^2 = a - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{a-4} \Rightarrow f_4 \text{ surjective.}$$

Problème 5 (9 points)

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{2x^2 - x - 15}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{2x^2 - x - 15} \stackrel{\text{Ind}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+3)(x-3)}{(2x+5)(x-3)}$
 $\stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+3}{2x+5} = \frac{9}{11}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} \stackrel{\text{Ind}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2}$
 $\stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$
 $= \frac{1}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16} \right) \stackrel{\text{Ind}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4-8}{(x-4)(x+4)}$
 $\stackrel{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{8}$

Problème 6 (4 points)

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^3 - 2x^2 + 1}{-3x^3 + 1000}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - 1)^3}{x^8 + x^4 + 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^3(1+\dots)}{-3x^3(1+\dots)} = \frac{15}{-3} = -5$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + \dots}{x^8 + \dots} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overset{1}{x^6}(1+\dots)}{\underset{x^2}{x^8}(1+\dots)} = 0$

Problème 7 (5 points)

Calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(x-7)^2}{x}$$

$$b) \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{x^2 + 6x + 8}{|x+4|} = \frac{0}{0} \text{ ind}$$

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(x-7)^2}{x} = \infty$$

Signe de la fonction :

x	0	7
f(x)	-	+

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(x-7)^2}{x} = +\infty$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x + 8}{-(x+4)} & \text{si } x < -4 \\ \frac{x^2 + 6x + 8}{x+4} & \text{si } x > -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 6x + 8}{-(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x+2)}{-(x+4)} = 2$$