2M1 – Mercredi 1er février 2023 Nom & prénom : ....

Géométrie analytique 1 – TE 787R

Problème	1	2	3	Total
Points	8	2	6	16
Points obtenus				

Problème 1 (8 points)
On donne les points $A(-2;-6)$, $B(9;-2)$, $C(5;9)$ et $D(13;-13)$.

a) Donner une équation cartésienne de la droite AB.

b) Donner une équation paramétrique vectorielle de la droite CD.

c) Montrer que la droite AB est perpendiculaire à la droite CD.

d) Le point B est-il sur la droite CD ? Justifier par un calcul.

a) $\frac{y+6}{x+2} = \frac{-2+6}{9+2} = \frac{4}{11} \Rightarrow 4x+8 = 11y+66$

$\Rightarrow (AB) : 4x - 11y - 58 = 0$

b) $\vec{CD} = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$

$(CD) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$

c) vecteur directeur de AB : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

vecteur directeur de CD : $\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 11 + (-11) \cdot 4 = 0$

donc les droites sont perpendiculaires.

d) $(CD): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$

$B(9;-2) \overset{?}{\in} CD$

$\begin{cases} 5+4k=9 & \Rightarrow k=1 \\ 9-11k=-2 & \Rightarrow k=1 \end{cases}$ <u>oui</u>

Problème 2 (~~12~~ 15 points)
Le triangle ABC est donné par les équations de ses côtés.

$$(BC) : 2x - y + 4 = 0 \quad (AC) : x - 2y - 1 = 0 \quad (AB) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer la longueur du côté AB du triangle ABC.
b) Calculer l'aire de ce triangle.
c) Calculer la longueur de la hauteur issue du sommet C.
d) Déterminer une équation cartésienne de la médiane du triangle ABC issue du sommet B

a) (AB) : $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 6 - k \end{cases}$ $\begin{array}{|c} k \\ 1 \\ 1 \end{array}$ $\Rightarrow (AB): x + y = 4$

Sommet A : $\begin{array}{l} (AB): \\ (AC): \end{array} \begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(3;1)$

Sommet B : $\begin{array}{l} (AB): \\ (BC): \end{array} \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \Rightarrow B(0;4)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$

5

b) Sommet C : $(BC): \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(-3;-2)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aire du ΔABC : $\frac{1}{2} \left| -3 \cdot (-6) - 3 \cdot (-3) \right|$

$= \frac{1}{2} \left| 18 + 9 \right| = \frac{27}{2} = 13,5$

3

c) Perpendiculaire à AB par C :

(h_c) : $x - y + c = 0$

Par C : $-3-(-2)+c=0 \Rightarrow c=1$

(h_c) : $x-y+1=0$

Pied de la hauteur : $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow H_c\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{CH_c} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ longueur de la hauteur : $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ 5

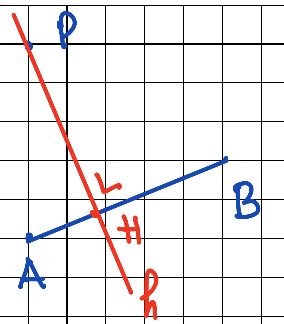
d) Milieu de AC : $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

médiane : $x=0$ 2

Problème 3 (6 points)
Considérons les points $A(3; \frac{11}{5})$, $B(\frac{11}{5}; 2)$ et $P(2; -4)$.

a) Déterminer les coordonnées du point H, projection orthogonale du point P sur la droite AB.

b) ~~Déterminer les coordonnées du point S, symétrique du point P par rapport à la droite AB.~~



$(AB): \ x - 4y + c = 0$

par A : $3 - 8{,}8 + c = 0 \Rightarrow c = +5{,}8$

$(AB): \ x - 4y + 5.8 = 0$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \text{u} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(h): \ 4x + y + c = 0$

par P : $8 - 4 + c = 0 \Rightarrow c = -4$

$(h): \ 4x + y - 4 = 0$

Point H : $\begin{cases} (h): & 4x + y = 4 \\ (AB): & x - 4y = -5{,}8 \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{H(0.6; 1.6)}$