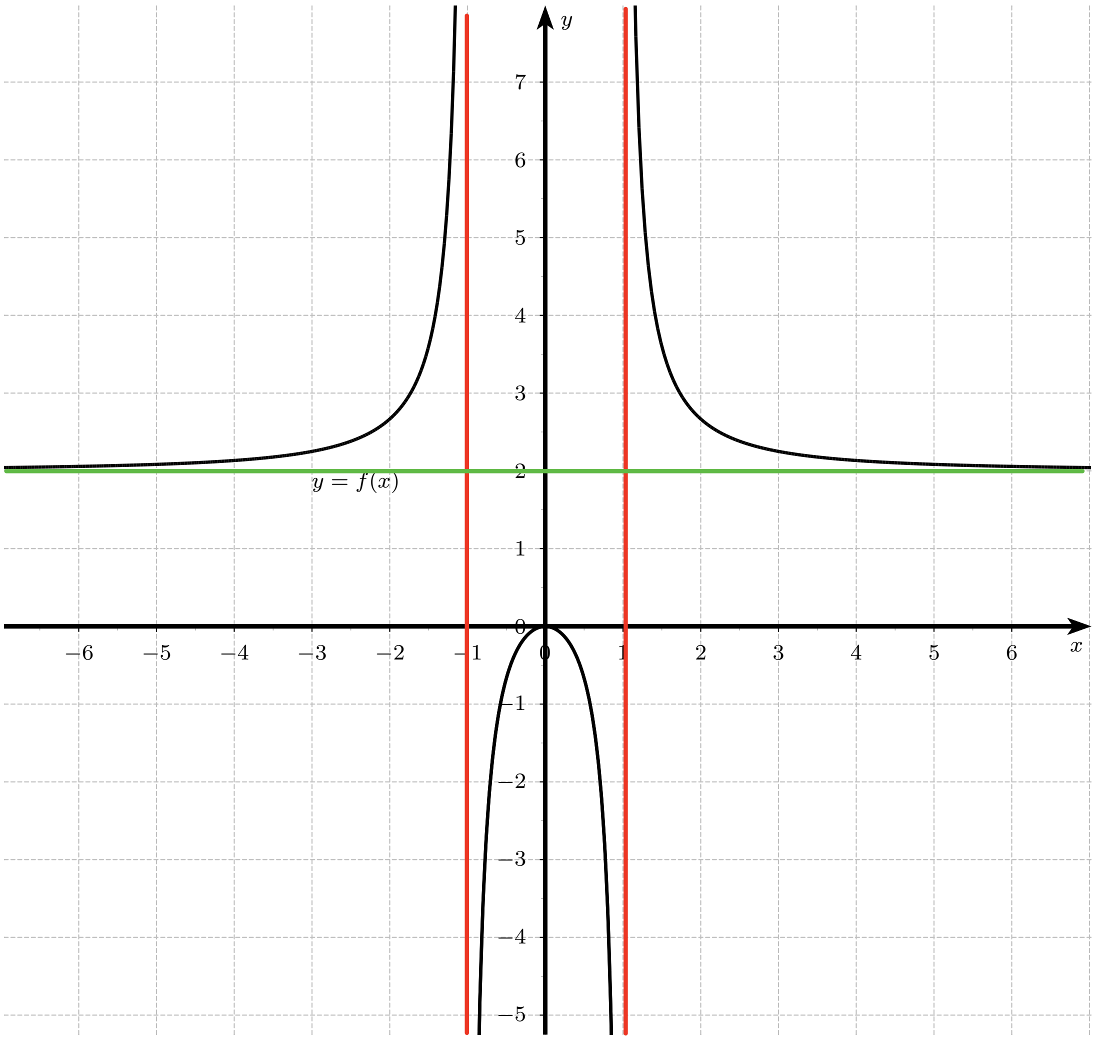
Analyse - Asymptotes – TE 791A

Problème	1	2	3	4	Total
Points	7	9	6	4	
Points obtenus					

26

Problème 1 (7 points)
A l'aide de cette représentation graphique d'une fonction f, répondre aux questions ci-dessous.



a) Représenter le tableau des signes de la fonction $f(x)$.

x		-1		0		1	
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$

b) Donner les équations de toutes les asymptotes verticales à la courbe $y = f(x)$.

$x = -1$

$x = 1$

c) Donner les équations de toutes les asymptotes horizontales (AH) ou obliques (AO) à la courbe $y = f(x)$. Indiquer si c'est une AH ou une AO.

AH : $y = 2$

d) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$

Problème 2 (9 points)

On donne la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + 2\,x - 3}{x^2 - 2\,x - 8}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$.

b) Déterminer le signe de $f(x)$.

c) Déterminer par calcul les asymptotes verticales de $f(x)$.

d) Déterminer par calcul la position des asymptotes verticales de $f(x)$ avec la courbe $y = f(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-4)}$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 4\}$ 2

b)

x		-3		-2		1		4	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

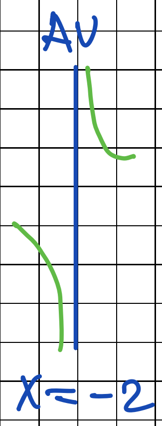
3

c) $x = -2$: $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \text{“}\dfrac{-3}{0}\text{”} \infty \Rightarrow AV : x = -2$

$x = 4$: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \text{“}\dfrac{21}{0}\text{”} \infty \Rightarrow AV : x = 4$ 2

d) AV $x = -2$: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$

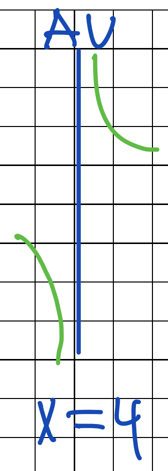
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty$



1

AU $x = 4$: $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = +\infty$



1

Problème 3 (6 points)
On donne la fonction

$$f(x) = \frac{2\,x^3 + 3\,x^2 + 3\,x - 1}{x^2 + 1}$$

a) Déterminer l'AH ou l'AO à la courbe $y = f(x)$.

b) Déterminer la position de cette asymptote par rapport au graphe. Indiquer les éventuelles intersections.

a) Par division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2x^3 & +3x^2 & +3x & -1 & x^2+1 \\
\cline{6-6}
- & 2x^3 & & +2x & & 2x+3 \\
\cline{2-5}
 & & 3x^2 & +x & -1 & \\
 & & 3x^2 & & +3 & \\
\cline{3-5}
 & & & x & -4 & \\
\end{array}$$

$$f(x) = \underbrace{2x+3}_{} + \underbrace{\frac{x-4}{x^2+1}}_{}$$

$$\delta(x) = \frac{x-4}{x^2+1}$$

AO: $y = 2x+3$

b)

x		4	
$\delta(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	au-dessous	coupe	au-dessus

Problème 4 (4 [redacted] points)

Déterminer a, b, c et d sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b\,x + c}{x + d}$$

- a une asymptote verticale d'équation $x = -4$;
- a une asymptote oblique d'équation $y = 2\,x + 1$;
- $f(-3) =$ [redacted] -4

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{K}{x+4} = \frac{2x^2 + 9x + 4 + K}{x+4}$$

$$f(-3) = \frac{18 - 27 + 4 + K}{1} = -4$$

$$K - 5 = -4 \Rightarrow K = 1$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 9x + 5}{x+4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 9 \\ c &= 5 \\ d &= 4 \end{aligned}}$$