2M1 – Mercredi 29 mars 2023 Nom & prénom : ....

Analyse - Asymptotes – TE 792A

Problème	1	2	3	Total
Points	17	7	5	29
Points obtenus				

Problème 1 (17 points)
On donne la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$.
b) Déterminer le signe de $f(x)$.
c) Déterminer par calcul les asymptotes verticales de $f(x)$.
d) Déterminer par calcul la position des asymptotes verticales de $f(x)$ avec la courbe $y = f(x)$. Représenter avec un schéma la position de la courbe par rapport à ses asymptotes verticales.
e) Déterminer l'AH ou l'AO à la courbe $y = f(x)$.
f) Déterminer la position de cette asymptote (AH ou AO) par rapport au graphe. Indiquer les éventuelles intersections.
g) Représenter graphiquement à la page 5 la courbe et ses asymptotes. Faire apparaître les zéros de la fonction, ses asymptotes et leurs intersections avec $y = f(x)$.

a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ 1

b)

x		-1		0	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

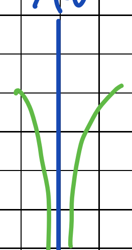
3

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \text{"}\frac{-1}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x = -1$ est une AV 1

d) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

AV



$x = -1$

2

e) Par division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -\ (x^3+2x^2+x) & x-2 \\ \cline{1-1} -2x^2-x & \\ -\ (-2x^2-4x-2) & \\ \cline{1-1} r:\ 3x+2 & \end{array}$$

$$f(x) = x-2+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

AO : $y = x-2$

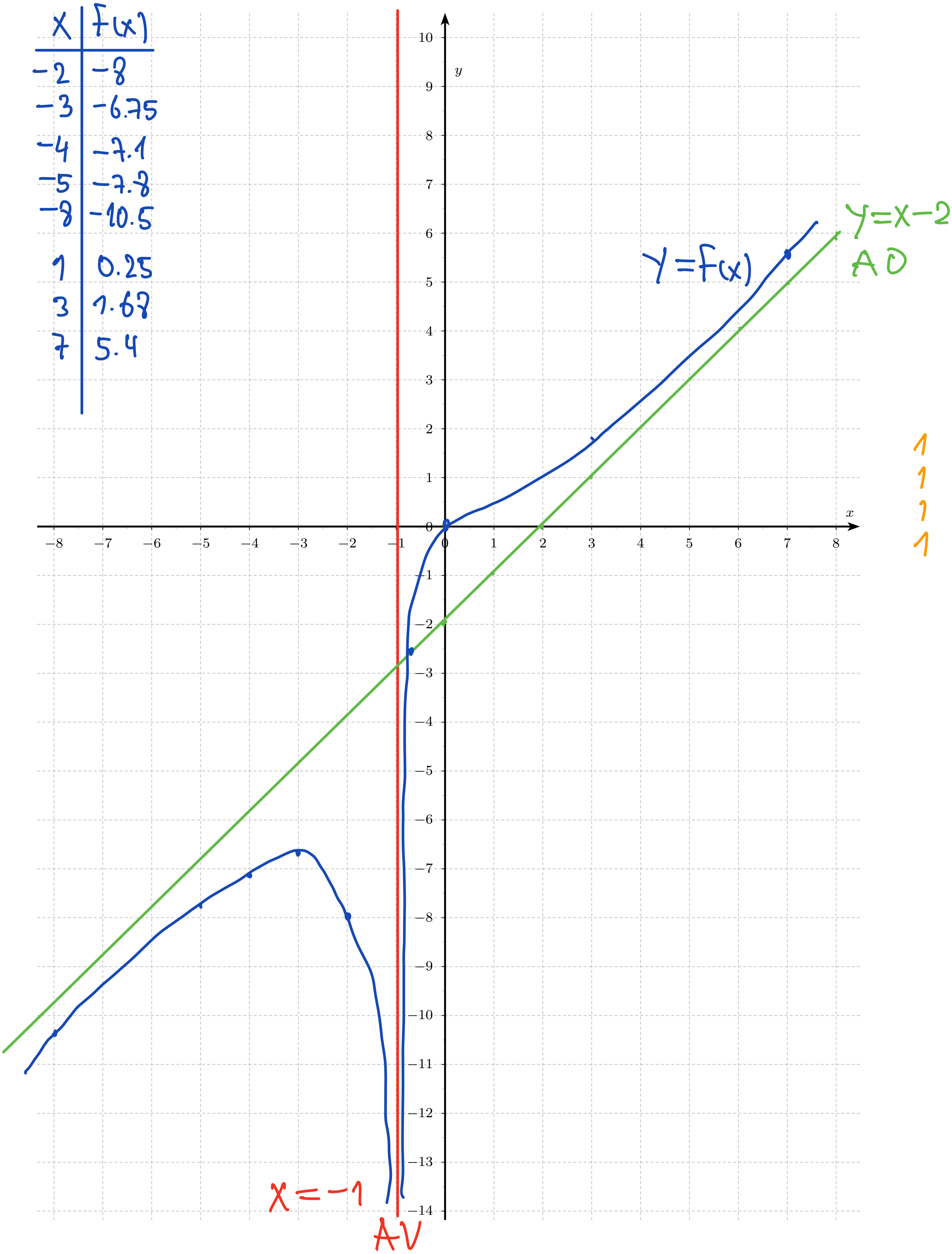
3

f) $\delta(x) = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

x		-1		$-2/3$	
$\delta(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	au-dessous	‖	au-dessous	coupe	au-dessus

3

x	$f(x)$
-2	-8
-3	-6.75
-4	-7.1
-5	-7.8
-8	-10.5
1	0.25
3	1.67
7	5.4



1
1
1
1

Problème 2 (7 points)
On donne la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 - 3\,x^2 + 4}{x^2 - 5\,x + 6} = \frac{(x-2)^2\,(x+1)}{x^2 - 5\,x + 6}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$.

b) Déterminer par calcul les asymptotes verticales de $f(x)$ et les coordonnées des « points-trous » éventuels.

c) Déterminer l'AH ou l'AO à la courbe $y = f(x)$.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-3)(x-2) = 0$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{2;3\}$ 2

b) En $x = 3$:

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) \underset{"\frac{4}{0}"}{=} \infty \implies$ $x = 3$ est une AV 1

En $x = 2$:

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \overset{\text{ind}}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)^2\,(x+1)}{x^2 - 5\,x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)} = 0$

$\implies$ Point trou en $(2;0)$ 2

c) Par division:

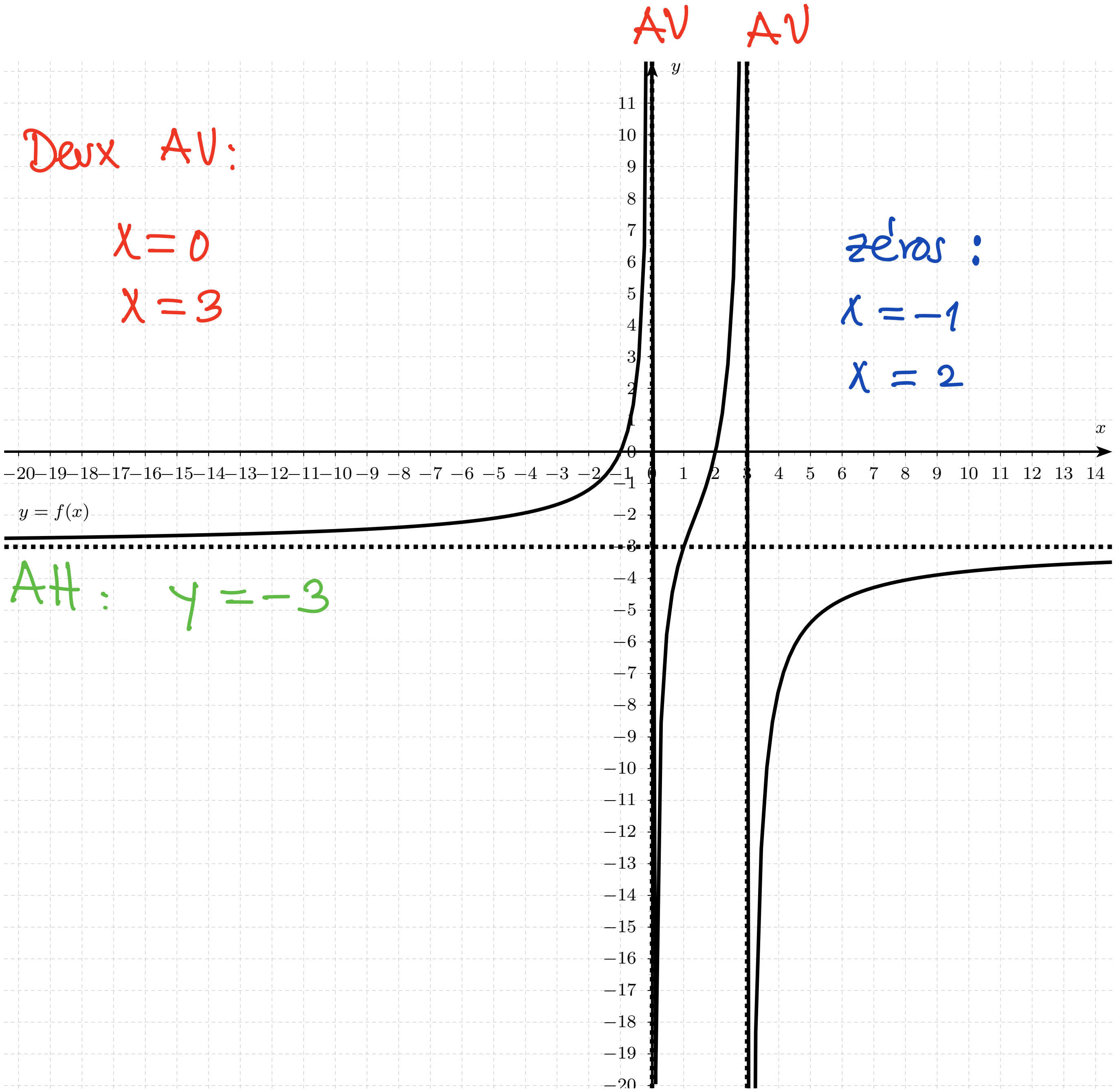
$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - 3x^2 \qquad + 4 & x^2 - 5x + 6 \\ - & x^3 - 5x^2 + 6x & x + 2 \\ \hline & 2x^2 - 6x + 4 & \\ - & 2x^2 - 10x + 12 & \\ \hline & 4x - 8 & \end{array}$$

AO: $y = x + 2$ 2

Problème 3 (5 points)
Déterminer a, b, c et d sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b\,x + c}{x^2 + d\,x}$$

est représentée ci-dessous.



$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x(x+d)}$$

① $d = -3$

② $a = -3$

$$f(x) = \frac{-3(x+1)(x-2)}{x^2-3x} = \frac{-3x^2+3x+6}{x^2-3x}$$

③ $b = 3$

④ $c = 6$