2M1 – Jeudi 11 mai 2023 Nom & prénom : . . . .

Analyse – Dérivées – TE 796A

Problème	1	2	3	4	**Total**
Points	5	8	5	5	23
Points obtenus					

Problème 1 (5 points)
En utilisant la définition formelle, soit

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

calculer le nombre dérivé $f'(4)$ par rapport à la fonction

$$f(x) = x^2 - 3\,x + 1$$

- $f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$

- $f'(4) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 3x + 1 - 5}{x - 4}$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{x-4}}$

$= \lim\limits_{x \to 4} x + 1 = 5$

Problème 2 (8 points)
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes. Factoriser complètement le résultat.

a) $f(x) = (3\,x^4 - 2\,x^2 + 1)^4$

b) $f(x) = (3\,x - 6)^2\,(x^2 + x + 1)^3$

c) $f(x) = \sqrt{5\,x^2 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{x(x-4)}{x^2+2}$

a) $f'(x) = 4(3x^4 - 2x^2 + 1)^3 \cdot (12x^3 - 4x)$

$= \underline{4 \cdot 4x(3x^2 - 1)(3x^4 - 2x^2 + 1)^3}$

b) $u = (3x-6)^2$; $u' = 2(3x-6)\cdot 3 = 6(3x-6)$

$v = (x^2 + x + 1)^3$; $v' = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$

$f'(x) = 6(3x-6)(x^2+x+1)^3 + (3x-6)^2 \cdot 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$

$= 3(3x-6)(x^2+x+1)^2\left[2(x^2+x+1) + (3x-6)(2x+1)\right]$

$= 3(3x-6)(x^2+x+1)^2(2x^2+2x+2+6x^2-9x-6)$

$= \underline{3(3x-6)(x^2+x+1)^2(8x^2-7x-4)}$

c) $\underline{f'(x) = \dfrac{10x-1}{2\sqrt{5x^2-x}}}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2+2}$

$u = x^2 - 4x$; $u' = 2x - 4$

$v = x^2 + 2$; $v' = 2x$

$f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2+2) - (x^2-4x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 4x - 8 - 2x^3 + 8x^2}{(x^2+2)^2} = \underline{\dfrac{4x^2+4x-8}{(x^2+2)^2}}$

Problème 3 (5 points)
Si la fonction f est donnée par

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

déterminer une équation de la droite t, tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $T(5\,;\cdots)$.

- $f(5) = \sqrt{15+1} = 4 \Rightarrow T(5\,;4)$

- $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$; $f'(5) = \dfrac{3}{2\cdot 4} = \dfrac{3}{8}$

- tangente en T : $y = \dfrac{3}{8}x + h$

par T : $4 = \dfrac{3}{8}\cdot 5 + h$

$h = 4 - \dfrac{15}{8} = \dfrac{32-15}{8} = \dfrac{17}{8}$

$$\boxed{y = \frac{3}{8}x + \frac{17}{8}}$$

Problème 4 (5 points)
Si la fonction f est donnée par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 1$$

donner par leurs coordonnées tous les points de la courbe $y = f(x)$ qui admettent une tangente parallèle à la droite qui passe par $A(2; -5)$ et $B(4, 7)$.

1) Pente de la droite AB: $\frac{7-(-5)}{4-2} = \frac{12}{2} = 6$

2) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 18$

3) $f'(x) = 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 18 = 6 \quad | -6$

$3x^2 - 6x - 24 = 0 \quad | \div 3$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

Deux points d'abscisse $x = 4$ et $x = -2$

4) $f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 18 \cdot 4 + 1 = -55 \Rightarrow T_1(4; -55)$

$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 18(-2) = 17 \Rightarrow T_2(-2; 17)$