 Nom & prénom : ....

Analyse – Dérivées – TE 796B

Problème	1	2	3	4	**Total**
Points	5	8	5	5	23
Points obtenus					

Problème 1 (5 points)
En utilisant la définition formelle, soit

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

calculer le nombre dérivé $f'(3)$ par rapport à la fonction

$$f(x) = x^2 - 4\,x + 1$$

- $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$
- $f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 1 - (-2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 3 - 1 = 2$$

$\underline{f'(3) = 2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 2}\right)$$

Problème 2 (8 points)
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes. Factoriser complètement le résultat.

a) $f(x) = (4\,x^3 - 5\,x^2 + 1)^3$

b) $f(x) = (4\,x - 8)^2\,(x^2 - x + 1)^3$

c) $f(x) = \sqrt{4\,x^2 - 7}$

d) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{x^2-2}$

a) $f'(x) = 3(4x^3-5x^2+1)^2 \cdot (12x^2-10x)$

$= \underline{6x(6x-5)(4x^3-5x^2+1)^2}$

b) $u = (4x-8)^2$; $u' = 2(4x-8)\cdot 4 = 8(4x-8)$

$v = (x^2-x+1)^3$; $v' = 3(x^2-x+1)^2(2x-1)$

$f'(x) = 8(4x-8)(x^2-x+1)^3 + (4x-8)^2 \cdot 3(x^2-x+1)^2(2x-1)$

$= (4x-8)(x^2-x+1)^2\left[8(x^2-x+1) + 3(4x-8)(2x-1)\right]$

$= (4x-8)(x^2-x+1)^2(8x^2-8x+8+24x^2-60x+24)$

$= (4x-8)(x^2-x+1)^2(32x^2-68x+32)$

$= \underline{16(x-2)(x^2-x+1)^2(8x^2-17x+8)}$

c) $f'(x) = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2-7}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-7}}$

d) $u = x^2+4x$; $u' = 2x+4$

$v = x^2-2$; $v' = 2x$

$f'(x) = \dfrac{(2x+4)(x^2-2) - (x^2+4x)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$

$= \dfrac{2x^3+4x^2-4x-8-2x^3-8x^2}{(x^2-2)^2}$

$= \dfrac{-4x^2-4x-8}{(x^2-2)^2}$

Problème 3 (5 points)
Si la fonction f est donnée par

$$f(x) = \sqrt{5x-9}$$

déterminer une équation de la droite t, tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $T(5\,;\cdots)$.

- $f(5) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \quad \Rightarrow \quad T(5\,;4)$

- $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-9}}$

  $f'(5) = \dfrac{5}{2\cdot 4} = \dfrac{5}{8}$

- tangente en T: $y = \dfrac{5}{8}x + h$

  par T: $4 = \dfrac{5}{8}\cdot 5 + h$

  $h = 4 - \dfrac{25}{8} = \dfrac{7}{8}$

$$y = \frac{5}{8}x + \frac{7}{8}$$

Problème 4 (5 points)
Si la fonction f est donnée par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 30x + 1$$

donner par leurs coordonnées tous les points de la courbe $y = f(x)$ qui admettent une tangente parallèle à la droite qui passe par $A(5; -7)$ et $B(7, 5)$.

1) Pente de la droite AB : $\frac{5-(-7)}{7-5} = \frac{12}{2} = 6$

2) $f'(x) = 3x^2 - 12x - 30$

3) $f'(x) = 6 \iff 3x^2 - 12x - 30 = 6 \quad | -6$

$3x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | \div 3$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0$

Deux points d'abcisse $x = 6$ et $x = -2$

4) $f(6) = 6^3 - 6 \cdot 6^2 - 30 \cdot 6 + 1 = -179 \Rightarrow T_1(6; -179)$

$f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 30 \cdot (-2) + 1 = 29 \Rightarrow T_2(-2; 29)$