2M1 – Mercredi 7 juin 2023 Nom & prénom : . . . .

Analyse – Application de la dérivée – TE 799A

Problème	1	2	3	**Total**
Points	20	8	8	36
Points obtenus				

Problème 1 (20 points)

Considérons la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2\,x^2 - 5\,x + 2}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer son ensemble de définition.

b) Calculer les zéros de f et étudier son signe.

c) Calculer les équations des asymptotes de f et déterminer la position relative du graphe de f par rapport à ces asymptotes.

d) Montrer par des calculs détaillés que $f'(x) = \dfrac{9\,(x-1)}{(x+1)^3}$

e) Etudier la croissance de f et calculer les coordonnées de ses extrema éventuels.

f) Dessiner le graphe de f sur la page 4.

a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ 1

b) zéros : $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$(2x-1)(x-2) = 0$

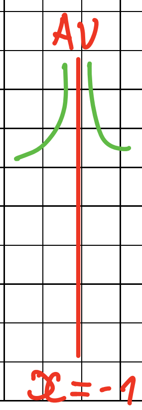
$x = 1/2$ ou $x = 2$

x		-1		$1/2$		2	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$
		p		i		i	

4

c) AV : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$ "$\frac{9}{0}$"

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = -\infty$ 2



AH :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x+2 & x^2+2x+1 \\ \hline 2x^2+4x+2 & 2 \\ \hline r: -9x & \end{array}$$

$$f(x) = 2 + \frac{-9x}{\underbrace{(x+1)^2}_{S(x)}}$$

x		-1		0	
$S(x)$	$+$	‖	$+$	0	$-$
$f(x)$	dessus	‖	dessus	$\boxed{\text{coupe}}$	dessous
		d		s	

(3)

d) $u = 2x^2 - 5x + 2$; $u' = 4x - 5$

$v = (x+1)^2$; $v' = 2(x+1)$

$$f'(x) = \frac{(4x-5)(x+1)^2 - (2x^2-5x+2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)}\left[(4x-5)(x+1) - 2(2x^2-5x+2)\right]}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

(3)

$$= \frac{4x^2 - x - 5 - 4x^2 + 10x - 4}{(x+1)^3} = \frac{9x - 9}{(x+1)^3} = \frac{9(x-1)}{(x+1)^3}$$

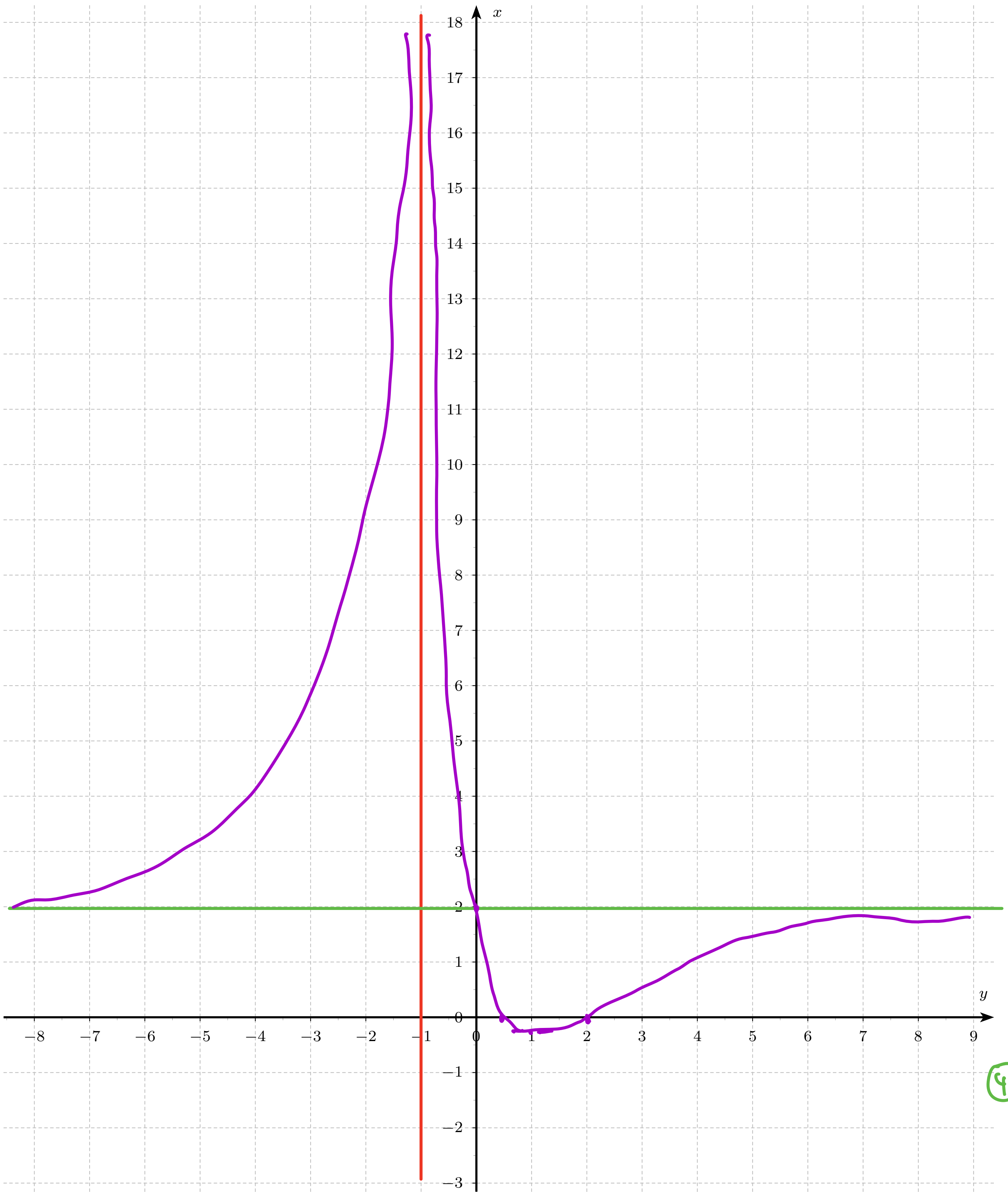
e) Croissance :

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	‖	↘	$\boxed{\text{min}}$	↗
		i		i	

min $\left(1 ; -\frac{1}{4}\right)$

(3)

Graphique du problème 1

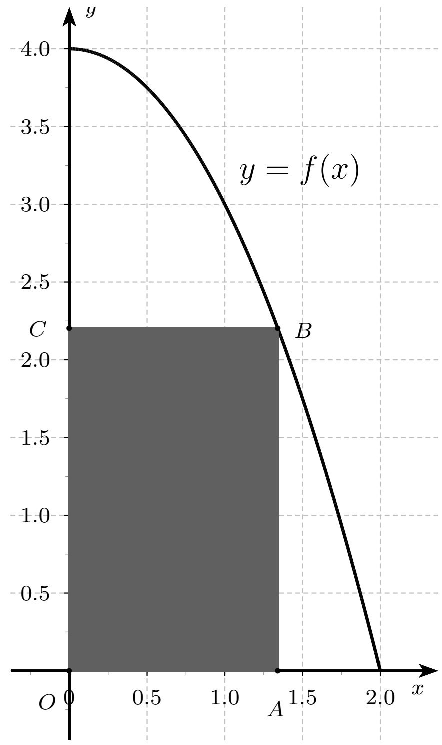


9

Problème 2 (8 points)
Déterminer l'aire du plus grand rectangle pouvant être inscrit sous le graphe de la fonction

$$f(x) = 4 - x^2$$

avec $0 < x < 2$, comme dans la figure ci-dessous.



Le sommet O est sur l'origine du système d'axes, le sommet A est sur l'axe des abscisses, le sommet B est sur la courbe et le sommet C est sur l'axe des ordonnées.
Le segment AB est parallèle à Oy.

Aire du rectangle : $A(x) = x(4-x^2)$, $0<x<2$ 1

$A'(x) = 1\cdot(4-x^2)+x\cdot(-2x) = 4-x^2-2x^2$ 2

$= 4-3x^2$

$A'(x)=0$: $3x^2=4 \iff x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \cong \pm 1{,}15$ 1

x		0		$2/\sqrt{3}$		2	
$A'(x)$			+	0	−		
$A(x)$			↗	max	↘		

3

L'aire max: $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3\sqrt{3}}$

$\cong 3{,}08$

1

Problème 3 (6 [redacted] points)
Etudier la courbure de la fonction

$$f(x) = x^5 + \frac{5}{3}x^4$$

Donner les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

$f'(x) = 5x^4 + \frac{20}{3}x^3$ 1

$f''(x) = 20x^3 + 20x^2 = 20x^2(x+1)$ 1

courbure :

x		-1		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\boxed{\text{inf}}$	$\cup$		$\cup$

3

pi : $\left(-1 ; \frac{2}{3}\right)$

$f(-1) = (-1)^5 + \frac{5}{3}(-1)^4 = -1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$ 1