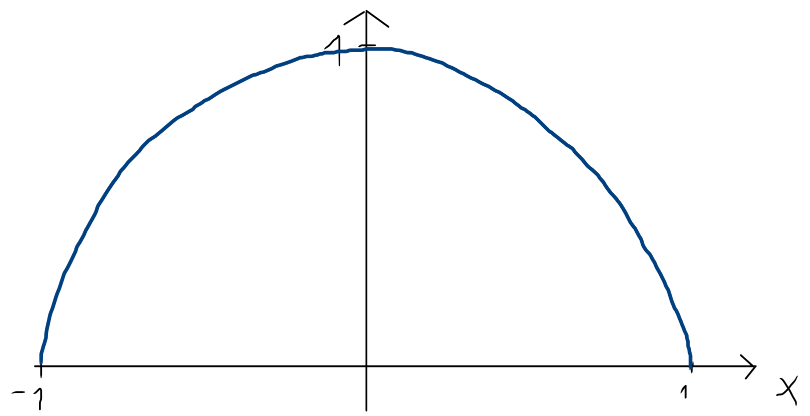
2.7.10 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculer la dérivée de f en $a \in]-1;1[$, puis étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.



Le graphique est le demi-cercle de rayon 1 centré à l'origine

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Déterminons son ensemble de définition.

Condition : $1 - x^2 \geq 0$

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$1 - x^2 = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x+1) = 0$$
$$\downarrow \quad\quad \downarrow$$
$$1 \quad\quad -1$$

$ED(f) = [-1; 1]$

Dérivons f : $\quad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = \frac{-\cancel{2}^{1}x}{\cancel{2}_{1}\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$ED(f') =]-1; 1[$

$$\lim_{x \to -1} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \quad \left(\frac{1}{+0}\right)$$

Ainsi, en $x = -1$, $y = f(x)$ admet une tangente verticale

2.7.18 Déterminer les coefficients a, b et c de la fonction $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sachant que $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$ et $f''(2) = 0$.

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

- $f(2) = -1 \Rightarrow -8 + 4a + 2b + c = -1$
- $f'(2) = 0 \Rightarrow -12 + 4a + b = 0$
- $f''(2) = 0 \Rightarrow -12 + 2a = 0$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = -6x + 2a$$

On résout le système :

$$\begin{cases} -8 + 4a + 2b + c = -1 \\ -12 + 4a + b = 0 \\ -12 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 24 + 2b + c = -1 \\ -12 + 24 + b = 0 \\ a = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -12 \\ 16 - 24 + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -12 \\ c = 7 \end{cases}$$

2.7.25 Déterminer les coefficients a, b, c et d sachant que la courbe $y = \dfrac{x^2+ax+b}{cx^2+dx-2}$:

1) • admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale,

2) • n'admet pas d'asymptote horizontale,

• passe par le point $\underbrace{P(1;-2)}_{3)}$ et qu'en ce point $\underbrace{\text{la pente de la tangente vaut } -5}_{4)}$.

2) il y a une AO : donc $\boxed{c = 0}$

1) $$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{dx-2} = \frac{x^2+ax+b}{x-2}$$

$x = 2$ est une AV : donc $d \cdot 2 - 2 = 0$

$$\boxed{d = 1}$$

3) $f(1) = -2$:
$$\frac{1+a+b}{-1} = -2 \quad \Big| \cdot(-1)$$
$$1+a+b = 2$$
$$\boxed{a+b = 1}$$

4) $$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-2}$$

$u = x^2+ax+b$; $u' = 2x+a$

$v = x-2$; $v' = 1$

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-2) - (x^2+ax+b)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x+\cancel{ax}-2a-x^2-\cancel{ax}-b}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x-2a-b}{(x-2)^2}$$

$f'(1) = -5 \Rightarrow$
$$\frac{1-4-2a-b}{(-1)^2} = -5$$
$$-3-2a-b = -5 \quad \Big| +3$$
$$-2a-b = -2$$

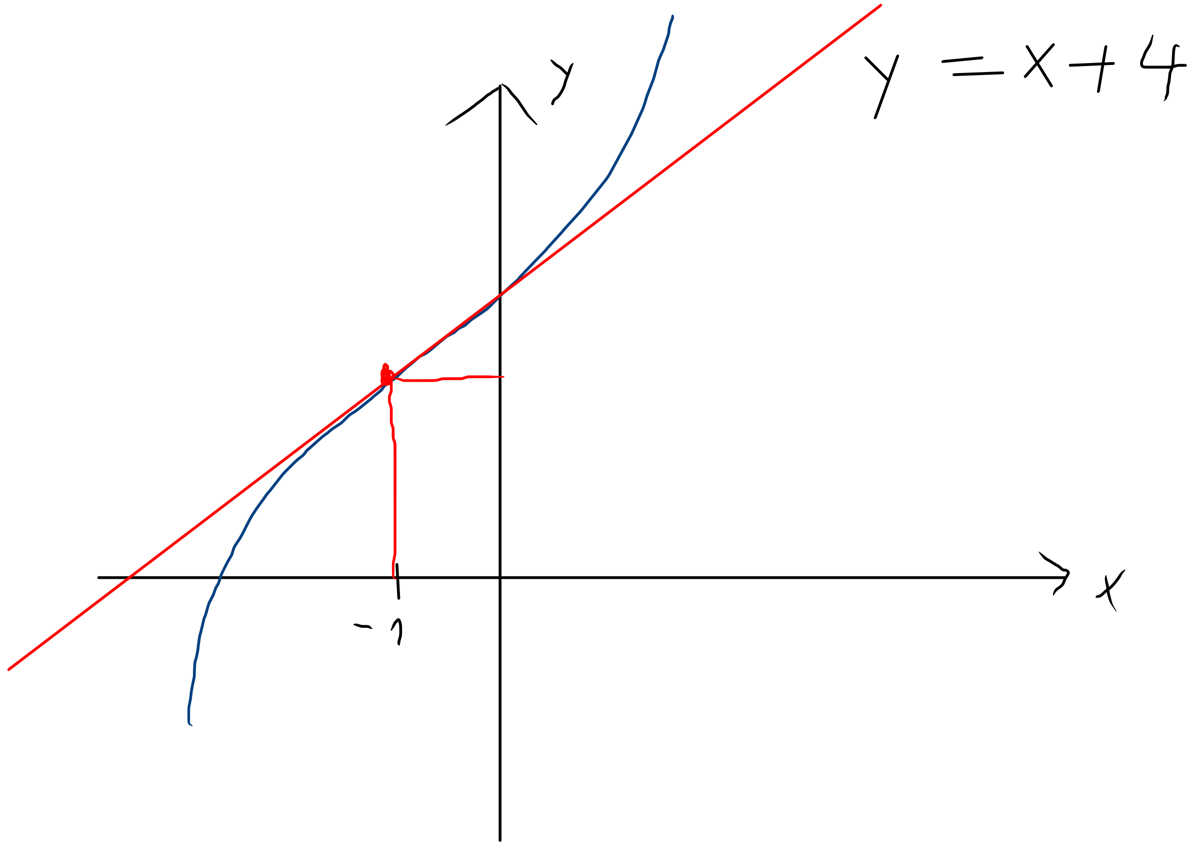
On résout le système :

$$\begin{cases} a+b = 1 & \cdot 1 \\ -2a-b = -2 & \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = -1 \\ b = 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a = 1} \\ \boxed{b = 0} \end{cases}$$

2.7.26 et 2.7.28

2.7.26 Pour quels réels a et b le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x + 4$?



- $f(-1) = -1 + a - b = 3 \Rightarrow a - b = 4$
- $f'(-1) = 1 \Rightarrow 3 - 2a + b = 1 \Rightarrow -2a + b = -2$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

On résout le système

$$\left\{\begin{array}{l} a - b = 4 \\ -2a + b = -2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} b \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a = 2 \\ b = 2a - 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = -6 \end{array}\right.$$

2.7.22 En quels points la courbe $y = \dfrac{x}{x^2+9}$ a-t-elle une tangente horizontale ?

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9}$$

tangente horizontale $\Longleftrightarrow$ $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+9) - x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{x^2+9-2x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2}$$

$u = x$; $u' = 1$

$v = x^2+9$; $v' = 2x$

Déterminons les zéros de la dérivée :

$$9 - x^2 = 0$$

$$(3-x)(3+x) = 0$$

$x = 3$ ou $x = -3$