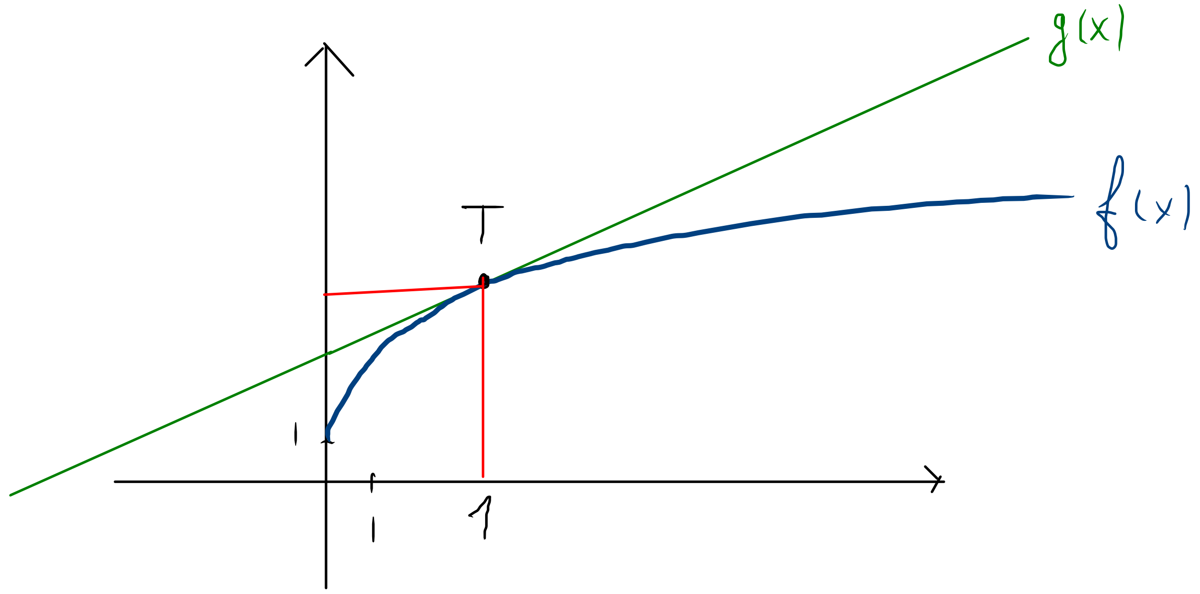
**2.7.31** Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que les courbes $y = \sqrt{x} + k$ et $y = \frac{x}{2} + 3$ soient tangentes.
Calculer le point de ~~tangence~~ contact

$$f(x) = \sqrt{x} + K$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + 3$$ tangente de pente $\frac{1}{2}$




Déterminons le point T de la courbe $f(x) = \sqrt{x} + K$ où sa dérivée vaut $\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

Donc $\boxed{T\left(1 ; \frac{7}{2}\right)}$

Déterminons K : $\frac{7}{2} = \sqrt{1} + K \Rightarrow \boxed{K = \frac{5}{2}}$

**2.7.30** Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ pour lesquels les courbes $y = x^3 + ax^2 + bx$ et $y = x^2 - 6x$ sont tangentes en un point d'abscisse 4.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 + 2a\,x + b$

$g(x) = x^2 - 6x \quad ; \quad g'(x) = 2x - 6$

Deux conditions: ① $f(4) = g(4)$

② $f'(4) = g'(4)$

① $64 + 16a + 4b = 16 - 24$

$16a + 4b = -72 \quad | \div 4$

$4a + b = -18$

② $48 + 8a + b = 2$

$8a + b = -46$

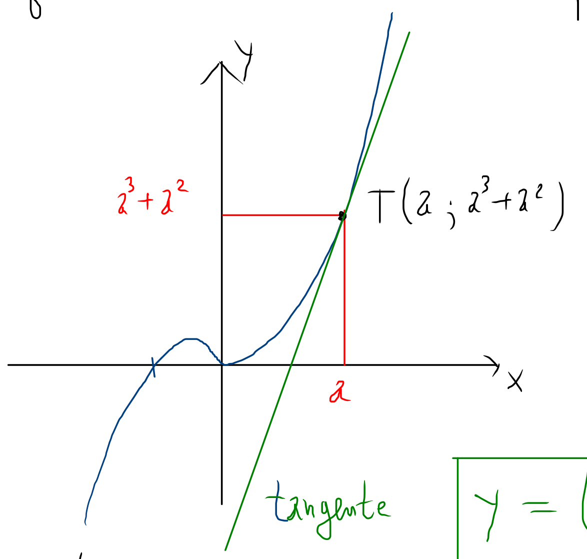
On résout le système :

$$\begin{cases} 4a + b = -18 \\ 8a + b = -46 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -28 \\ b = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 10 \end{cases}$$

**2.7.28** Quels sont les points de la courbe $y = x^3 + x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?

$f(x) = x^3 + x^2$ Le point $(0;0)$ est sur la courbe.




$$\boxed{y = (3a^2 + 2a)\, x + h}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

Comme la tangente passe par l'origine, $h = 0$.

La tangente passe par le point T :

$$\underbrace{a^3 + a^2}_{y} = (3a^2 + 2a)\underbrace{a}_{x}$$

$$a^3 + a^2 = 3a^3 + 2a^2$$

$$2a^3 + a^2 = 0$$

$$a^2(2a+1) = 0$$

$a = 0$ $a = -\frac{1}{2}$

Les points sont $T_1(0,0)$ et $T_2\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{8}\right)$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{-1}{8} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$