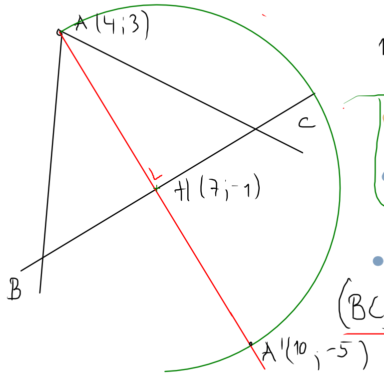
Projection orthogonale, symétrique, aire d'un triangle

12. 01. 23

Soit un triangle donné par ses trois sommets $A(4,3)$, $B(7,-1)$ et $C(11,2)$. Déterminer

1) La projection orthogonale de A sur BC : H
2) Le symétrique de A par rapport à BC : A'
3) L'aire ~~du~~ ΔABC.



1) Droite BC :

$$\frac{y-2}{x-11} = \frac{-1-2}{7-11} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$3x - 33 = 4y - 8$$

$$(BC):\ 3x - 4y - 25 = 0$$

2) Perpendiculaire à BC par A :

$$4x + 3y + c = 0$$

par A : $4\cdot 4 + 3\cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -25$

$$(AH):\ 4x + 3y - 25 = 0$$

3) Le point H :

$$\begin{array}{ll|l|l} & & y & x \\ (BC): & 3x - 4y = 25 & \cdot 3 & \cdot 4 \\ (AH): & 4x + 3y = 25 & \cdot 4 & \cdot(-3) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25x = 175 \\ -25y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow H(7;-1)$$

4) Le symétrique A' : $A'(p;q)$

$$\left.\begin{array}{lll} 7 = \frac{4+p}{2} & \Rightarrow & p = 10 \\ -1 = \frac{3+q}{2} & \Rightarrow & q = -5 \end{array}\right\} A'(10;-5)$$

5) Aire du triangle

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}\,\|\vec{BC}\|\,\|\vec{AH}\|$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = 5$$

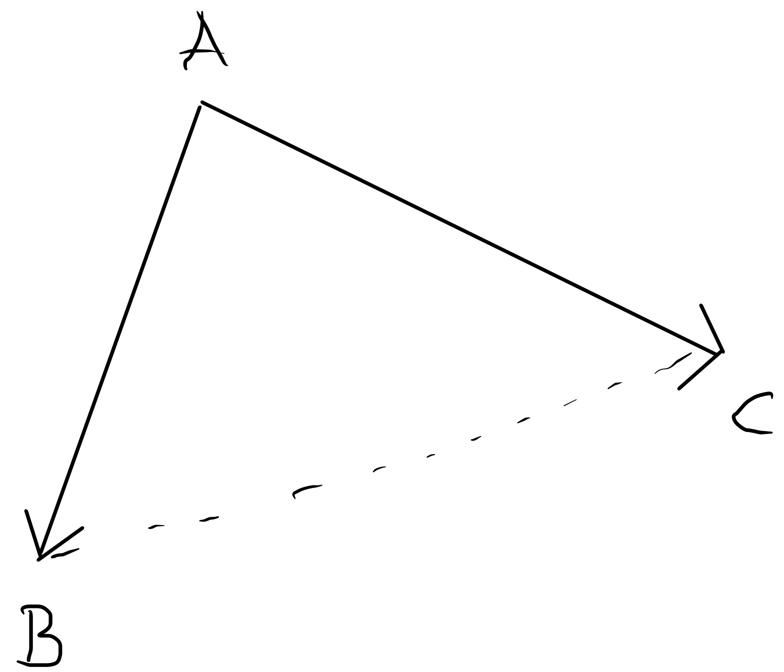
$$\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AH}\| = 5$$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$$

6) Calcul de l'aire

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \left| -3 - (-28) \right| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5$$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \right| = 12,5$$