2.6.5 Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^n+3}{x^2-9}$.

$$f(x) = \frac{x^n+3}{x^2-9} \qquad n \in \mathbb{N}$$

1) n = 0 : $f(x) = \frac{4}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x^2-9}$ $ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-3; 3\}$

- AV : $x = -3$ et $x = 3$
- ~~AH~~/~~AO~~ : $y = 0$ est une AH

2) n = 1 : $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$= \frac{\cancel{x+3}}{(\cancel{x+3})(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

- AV : $x = 3$
- AH/AO : $y = 0$ est une AH

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2-9} \overset{\text{ind}}{=} \text{" } \frac{0}{0} \text{" } = \lim_{x \to -3} \frac{\cancel{x+3}}{(x-3)(\cancel{x+3})} = \frac{1}{-6} \qquad \text{Trou } T\left(-3; -\frac{1}{6}\right)$$

3) n = 2 : $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-9}$ $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$

- AV : $x = -3$, $x = 3$
- AH/AO :

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +3 & x^2-9 \\ \cline{3-3} -\ x^2 & -9 & 1 \\ \cline{1-2} & 12 & \end{array}$$

$$f(x) = 1 + \frac{12}{x^2-9}$$

$y = 1$ est une AH

4) n = 3 : $f(x) = \frac{x^3+3}{x^2-9} = x + \frac{9x+3}{x^2-9}$

- AV : $x = -3$, $x = 3$
- AH/AO :

$$\begin{array}{rr|l} x^3 \quad \ldots \quad \ldots & +3 & x^2-9 \\ \cline{3-3} -\ x^3 & -9x & x \\ \cline{1-2} \text{reste} & 9x+3 & \end{array}$$

$y = x$

5) n ≥ 4 :

- AV : $x = -3$, $x = 3$

$y =$ nombre ← H
$y = mx + h$ ← O

AH/AO : aucune

Deuxième méthode pour trouver les AH/AO

Si $y = mx + h$ est une AH/AO de la fonction $f(x)$, alors on a

$$\boxed{\begin{aligned} m &= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \\ h &= \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right) \end{aligned}}$$

NB: il faudrait distinguer les AH/AO à gauche et à droite.

Exemple :

Chercher les AH/AO de $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$h = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3x-1}{x+2} - 2x \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-1-2x(x+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^2}+3x-1-\cancel{2x^2}-4x}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x-1}{x+2} = -1$$

Finalement, on a une AO : $y = 2x - 1$

Ou par division :

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^2+3x-1 & x+2 \\ \hline - & 2x^2+4x & 2x-1 \\ \hline & -x-1 & \\ & -x-2 & \\ \hline & 1 & \text{reste} \end{array}$$

AO: $y = 2x - 1$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+2}$$

2.6.7 Déterminer a, b et c sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + c}$$

admet les droites $x = 3$ et $y = x + 2$ comme asymptotes.

AV: $x = 3 \Rightarrow \boxed{c = -3}$

AO: $y = x + 2$

$$\begin{array}{rr|l} ax^2 + bx & & x - 3 \\ \hline - \quad x^2 - 3x & & x + 2 \\ \boxed{a = 1} \quad bx + 3x & & \\ - \quad 2x & -6 & \\ \hline & 6 & \end{array}$$

reste

$bx + 3x - 2x = 0$

$bx + x = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}$$

2.6.8 Déterminer a, b, c et d sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

dont le graphe passe par le point $A(2; -2)$ et qui admet les droites $x = -3$ et $y = -2x + 1$ comme asymptotes.

1) AV : $x = -3$

2) AO : $y = -2x + 1$

3) $f(2) = -2$

1) $\boxed{d = 3}$ $\qquad f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + 3}$

2) Effectuons la division par Horner

	a	b	c
-3		$-3a$	$-3b + 9a$
	a	$b - 3a$	$c - 3b + 9a$

$$f(x) = ax + \underbrace{(b - 3a)}_{= 1} + \frac{9a - 3b + c}{x + 3}$$

$a = -2$ $\qquad b + 6 = 1$

$b = -5$

Donc $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 5x + c}{x + 3}$

3) $f(2) = -2 \Rightarrow$

$$\frac{-8 - 10 + c}{5} = -2$$

$$c - 18 = -10$$

$$c = 8$$

Finalement $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 5x + 8}{x + 3}$

1) $$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 4}$$