24.03.23

Nombre dérivé

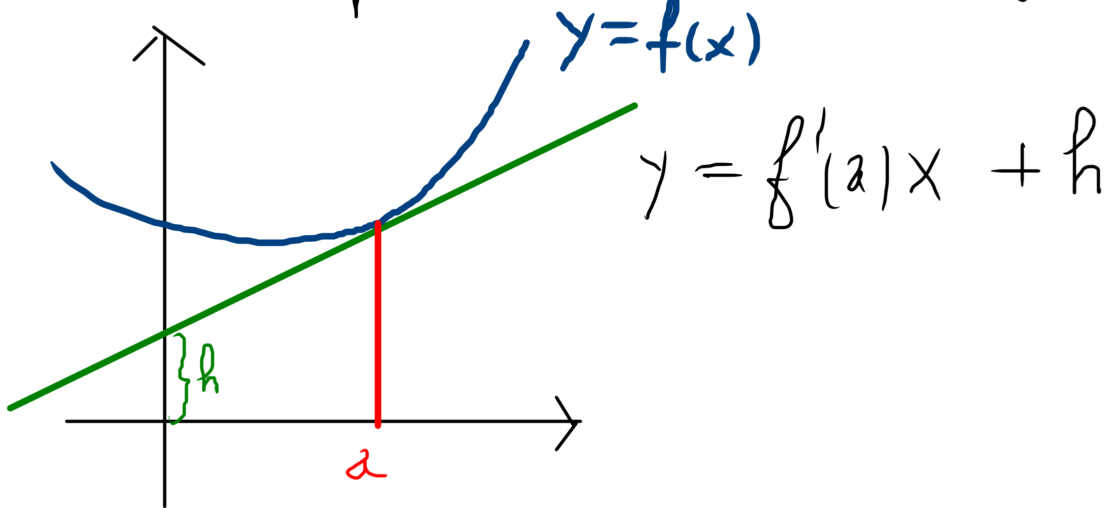
Soit f une fonction définie dans un voisinage de a.

Si la limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie,

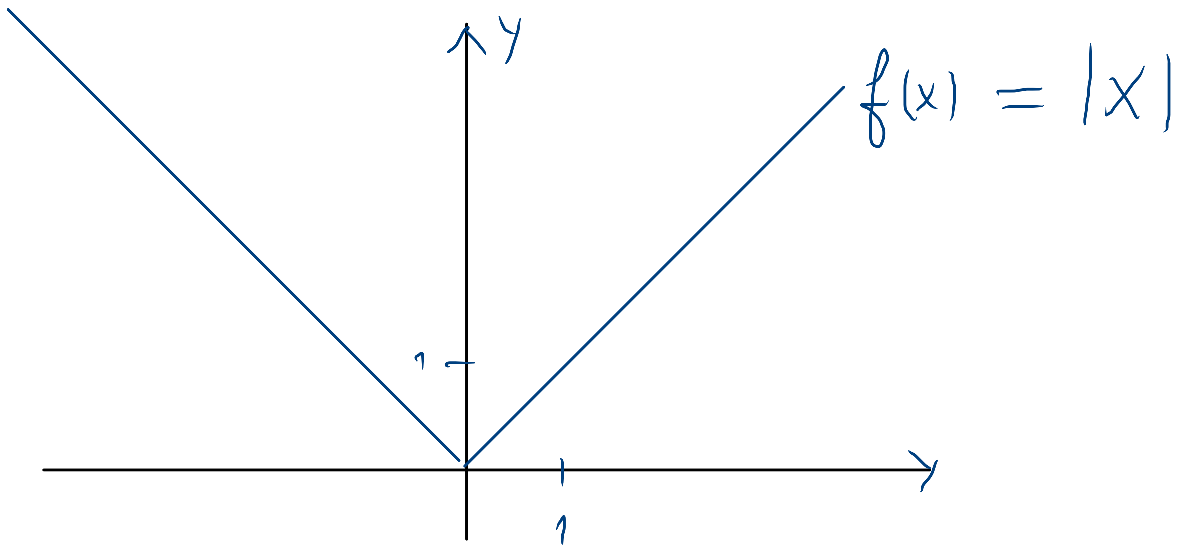
on l'appelle nombre dérivé de la fonction f au point a.

On note cette limite $f'(a)$.

Ce nombre est la pente de la tangente au point d'abcisse a



Fonction où le nombre dérivé n'existe pas.



Cette fonction est continue partout, mais $f'(0)$ n'existe pas !

En effet

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \overset{\text{Ind}}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Il faut calculer deux limites, à gauche et à droite :

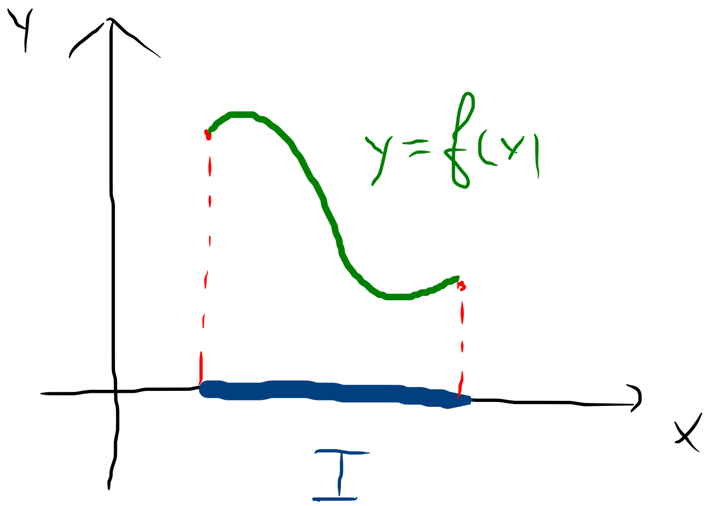
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-\cancel{h}^{-1}}{\cancel{h}_{1}} = -1$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{\cancel{h}^{1}}{\cancel{h}_{1}} = 1$$

$\Bigg\}$ $f'(0)$ n'existe pas

Fonction dérivable sur un intervalle

Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout point de I



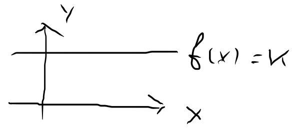
Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction
$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$
est appelée fonction dérivée de f sur I.

Formules de dérivation

1) $(K)' = 0 \quad , \quad K \in \mathbb{R}$



2) $(x)' = 1$

$(mx + h)' = m$

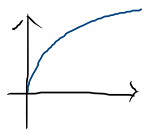
3) $\boxed{(x^n)' = n\, x^{n-1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$

$(x^3)' = 3x^2 \quad , \quad (x^{18})' = 18\, x^{17}$

4) $(x^n)' = n\, x^{n-1} \qquad n \in \mathbb{R}^*$

$(x^{5/3})' = \frac{5}{3}\, x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



5) $(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$

6) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)' = 3x^2 + 2x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} \right]$$

7) $(f(x)\cdot g(x))' \neq f'(x)\cdot g'(x)$

$$(x^6)' = \underline{6x^5}$$

$$(x^4\cdot x^2)' \neq (x^4)'\cdot(x^2)' = 4x^3\cdot 2x = 8x^4$$

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

$$\begin{aligned}(x^4\cdot x^2)' &= (x^4)'\cdot x^2 + x^4\cdot(x^2)' \\ &= 4x^3\cdot x^2 + x^4\cdot 2x \\ &= 4x^5 + 2x^5 = \underline{6x^5}\end{aligned}$$