24.08.22

Puissances

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$$

a s'appelle la base

n s'appelle l'exposant

Règles

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

3) $a^0 = 1$

$$a^m = a^{m+0} \overset{1)}{=} a^m \cdot \underbrace{a^0}_{1}$$

$$2^3 = 2^{3+0} \overset{1)}{=} 2^3 \cdot \underbrace{2^0}_{1}$$

4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

5) $$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{si } m > n \\ 1, & \text{si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{si } m < n \end{cases}$$

1.1.1 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$ c) $3^6 \cdot 5^6$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^{10}$ e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$ f) $\frac{5^8}{5^6}$

g) $\frac{5^6}{5^8}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ i) $\frac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

e) $\boxed{3^2 \cdot 5^2} \cdot 15^3 = 15^2 \cdot 15^3 = 15^5$

d) $5^{0+1+2+\ldots+10} = 5^{55}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 + 2 + & \ldots & + 10 \\ 10 + 9 + & & + 1 \\ \hline 11 + 11 + & \ldots & + 11 & = 10 \cdot 11 \end{array}$$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{2^5}{3^5}$

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n \text{ impair} \\ 1, & n \text{ pair} \end{cases}$$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

1.1.2 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2^2)^3$ b) $2^{(2^3)}$ c) $((-4)^2)^4$

d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^6$ e) $\left(-\frac{2^4}{3^3}\right)^2$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{3}\right)^3$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$ h) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{9}{8}\right)^4$ i) $\frac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}}$

c) $\left((-4)^2\right)^4 = \left(4^2\right)^4 = 4^8$

$\left((-4)^2\right)^4 = (-4)^8 = 4^8$

$= 4^8 = \left(2^2\right)^8 = 2^{16}$

g) $\boxed{4}^2 \cdot 2^5 \cdot \boxed{8}^2 = \left(2^2\right)^2 \cdot 2^5 \cdot \left(2^3\right)^2 =$

$2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^{15}$

—

h) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{9}{8}\right)^4$

$\frac{3^4 \cdot 8^4}{4^4 \cdot 9^4} = \frac{24^4}{36^4} = \left(\frac{24}{36}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

i) $\frac{(3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4)^5}{3^{50}} = \frac{3^5 \cdot 3^{10} \cdot 3^{15} \cdot 3^{20}}{3^{50}}$

$= \frac{3^{5+10+15+20}}{3^{50}} = \frac{3^{50}}{3^{50}} = \underline{1}$

Exposants négatifs

Exemple :

$$2^3 \cdot 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$$

2^{-3} est l'inverse de 2^3.

Donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Puissances de 10 :

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1'000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

8) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{\frac{4}{9}} = 1 \cdot \frac{9}{4}$$

1.1.3 Calculer :

a) 4^{-2} b) 2^{-1} c) 3^{-3} d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ e) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

a) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{(2^2)^2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

b) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{27}$

d) $\left(\boxed{\frac{1}{4}}\right)^{-1} = \left(\boxed{4^{-1}}\right)^{-1} = 4$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}$

1.1.5 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2$ b) $(2^3)^{-5}$ c) $\dfrac{5^3}{5^{-2}}$

d) $((-1)^{-2})^{-3}$ e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1}$ f) $\left(\dfrac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5}$

g) $7^{-3} \cdot \dfrac{49}{7^8} \cdot 7$ h) $10'000 \cdot \dfrac{100}{100'000} \cdot 10^{-3}$ i) $\dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3}$

g) $7^{-3} \cdot \boxed{\dfrac{\cancel{7}^2}{7^8}} \cdot 7 = 7^{-3} \cdot 7^{-6} \cdot 7 = 7^{-8} = \dfrac{1}{7^8}$

h) $10^4 \cdot \dfrac{10^2}{10^5} \cdot 10^{-3} = 10^4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-2}$

i) $1280 = 128 \cdot 10 = 2^7 \cdot 2 \cdot 5 = 2^8 \cdot 5$

$$\frac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3} = \frac{2^8 \cdot 5 \cdot 5^7 \cdot 5^3}{(5^{-1} \cdot 5^2)^3} = \frac{2^8 \cdot 5^{11}}{5^3}$$

$$= 2^8 \cdot 5^8 = 10^8$$