2.8.10

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

① Ensemble de définition

Zéros du dénominateur : $x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$

② Parité

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$

La fonction est impaire, le graphique est symétrique ~~par rapport à l'axe des y.~~ à l'origine.

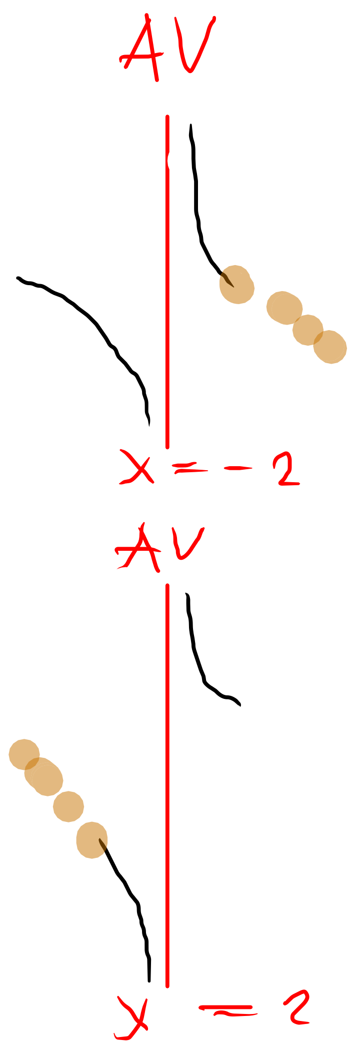
③ Le signe de f

x		-2		0		2	
x^3	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$x^2 - 4$	$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

④ Asymptotes

AV : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$ "$\frac{-8}{0}$"

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$ $\frac{8}{0}$



AO : 1 degré de plus au numérateur

$x^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad -$	$x^2 - 4$
$x^3 \qquad -4x$	x
r : $4x$	

$f(x) = \underbrace{x}_{\text{AO } y = x} + \boxed{\dfrac{4x}{x^2-4}}$

$\delta(x)$ position de la courbe et de l'AO

x		-2		0		2	
$\delta(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
Position	dessous	‖	dessus	coupe	dessous	‖	dessus

5 Croissance

$u = x^3 \quad ; \quad u' = 3x^2$

$v = x^2 - 4 \quad ; \quad v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2\left(3(x^2-4) - 2x^2\right)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})}{(x^2-4)^2}$$

x		$-\sqrt{12}$		-2		0		2		$\sqrt{12}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max	↘	‖	↘		↘	‖	↘	min	↗

max : $(-\sqrt{12} \; ; -3\sqrt{3}) \simeq (-3,5 \; ; -5,2)$

min : $(\sqrt{12} \; ; \; 3\sqrt{3}) \simeq (3,5 \; , \; 5,2)$

⑥ Courbure

$u = x^2(x^2-12)$; $u' = 2x(x^2-12) + x^2 \cdot 2x$
$= 2x\left[x^2-12+x^2\right] = 4x(x^2-6)$

$v = (x^2-4)^2$; $v' = 2(x^2-4)\cdot 2x$
$= 4x(x^2-4)$

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-6)(x^2-4)^2 - x^2(x^2-12)4x(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

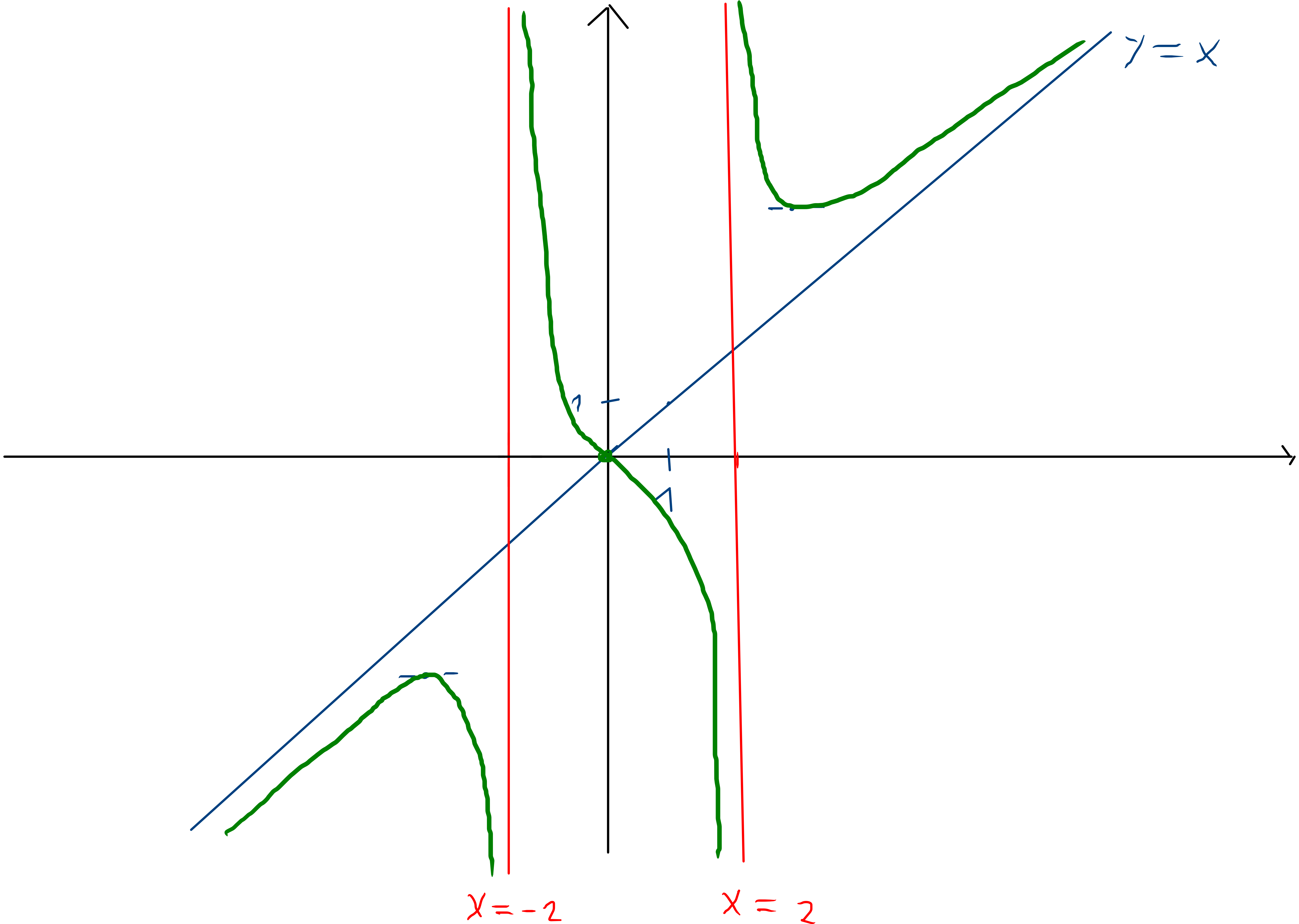
$$= \frac{4x\cancel{(x^2-4)}\left[(x^2-6)(x^2-4) - x^2(x^2-12)\right]}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{4x\left[x^4-10x^2+24-x^4+12x^2\right]}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{4x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

x		-2		0		2	
$f''(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	∩	‖	∪	pi	∩	‖	∪

pi $(0;0)$



y = x
1
1
-1
x = -2
x = 2