2.6.4 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}} = \lim_{x\to16}\frac{\cancel{(x-16)}(\sqrt{x}+4)}{\cancel{x-16}}$

défini au voisinage de 16

$$= \lim_{x\to16}\left(\sqrt{x}+4\right) = 8$$

défini au voisinage de 0

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} \underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}} = \lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+1}+1)}{\underset{1}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to0}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) = 2$$

e) $\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} \underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \lim_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3}} = \lim_{x\to5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9}$

défini au voisinage de 5

$$= \lim_{x\to5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-10} = \lim_{x\to5}\frac{\cancel{(x-5)}(\sqrt{2x-1}+3)}{2\cancel{(x-5)}} = \lim_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}+3}{2}$$

$$= \frac{3+3}{2} = 3$$

f) $\displaystyle\lim_{t\to2}\frac{1+\sqrt{t-2}}{t} = \frac{1}{2}$

déf. au vois. de 2

g) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} \underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}\,\boxed{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}}$

$$= \lim_{x\to2}\frac{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{(x+1)-(2x-1)} = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{-x+2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}\right)}{-\underset{1}{\cancel{(x-2)}}} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}\right)}{-1} = -2\sqrt{3}$$

h) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{2-x}}$ $\underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{\overset{\text{Ind}}{=}}$ $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{2-x}} \cdot \boxed{\dfrac{x - \sqrt{2-x}}{x - \sqrt{2-x}}}$

déf au voisinage de -2

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\left(x + \sqrt{x+6}\right)\left(x - \sqrt{2-x}\right)}{x^2 + x - 2} \underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{\overset{\text{Ind}}{=}}$$

déf au voisinage de -2

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\left(x - \sqrt{2-x}\right)\left(x + \sqrt{x+6}\right)}{x^2 + x - 2} \cdot \boxed{\frac{\left(x - \sqrt{x+6}\right)}{\left(x - \sqrt{x+6}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\left(x - \sqrt{2-x}\right)\left(x^2 - x - 6\right)}{\left(x^2 + x - 2\right)\left(x - \sqrt{x+6}\right)} \underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{\overset{\text{Ind}}{=}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\left(x - \sqrt{2-x}\right)(x-3)\cancel{(x+2)}}{\left(x - \sqrt{x+6}\right)(x-1)\cancel{(x+2)}} = \frac{\cancel{(-2-2)}(-2-3)}{\cancel{(-2-2)}(-2-1)} = \frac{5}{3}$$