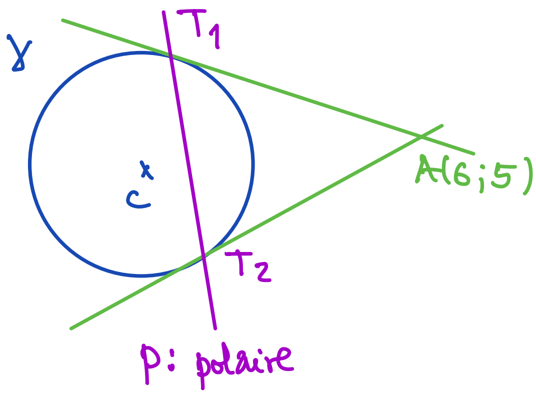
3.3.22 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ issues du point $A(6;5)$, ainsi que les coordonnées des deux points de contact.

$$(\gamma):\quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 20 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

$$C(1;-2) \quad \text{et} \quad r = 5$$

Comme on cherche les points de contact, on va utiliser la polaire de A par rapport à γ.



- γ dédoublée : $(x-1)(x-1) + (y+2)(y+2) = 25$

$$(p):\quad (6-1)(x-1) + (5+2)(y+2) = 25$$

$$5x - 5 + 7y + 14 - 25 = 0$$

$$(p):\quad 5x + 7y - 16 = 0$$

- Point de contact :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \\ x = \dfrac{-7y+16}{5} \end{cases}$$

Par substitution :

$$\left(\frac{-7y+16}{5}-1\right)^2+(y+2)^2=25$$

$$\frac{(-7y+16-5)^2}{25}+y^2+4y+4=25 \quad \Big| \cdot 25$$

$$(-7y+11)^2+25y^2+100y+100=625$$

$$49y^2-154y+121+25y^2+100y+100=625$$

$$74y^2-54y-404=0$$

$$\Delta=(-54)^2+4\cdot 74\cdot 404=122'500=350^2$$

$$y_1=\frac{54-350}{148}=\frac{-296}{148}=-2 \quad \Rightarrow x=\frac{14+16}{5}=6$$

$$y_2=\frac{54+350}{148}=\frac{404}{148}=\frac{101}{37} \quad \Rightarrow x=\frac{-7}{5}\cdot\frac{101}{37}+\frac{16}{5}$$

$$=\frac{-707+592}{5\cdot 37}$$

$$=\frac{-115}{5\cdot 37}=\frac{-23}{37}$$

$T_1(6;-2)$ et $T_2\left(\frac{-23}{37};\frac{101}{37}\right)$

Calculons les tangentes :

- (AT_1) : $\underline{x = 6}$

- (AT_2) : $\dfrac{y - 5}{x - 6} = \dfrac{\frac{101}{37} - 5}{\frac{-23}{37} - 6} = \dfrac{\frac{-84}{37}}{\frac{-245}{37}} = \dfrac{84}{245} = \dfrac{12}{35}$

$$12(x-6) = 35(y-5)$$

$$12x - 35y - 72 + 175 = 0$$

(AT_2) : $\underline{12x - 35y + 103 = 0}$