Série 3 – Suites

Exercice 1

Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = \dfrac{n^2 - 25}{2\,n^2 + 1}, \quad n \geq 1$

b) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}, \quad n \geq 1$

c) $c_n = \cos\left(\frac{n\,\pi}{6}\right), \quad n \geq 1$

d) $d_n = 2\,n^2 - 1, \quad n \geq 1$

e) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{2}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

a) $\left(-8, \frac{-7}{3}, \frac{-16}{19}, \frac{-3}{11}, 0, \frac{11}{73}, \frac{8}{33}, \dots \right)$

Comme $\underbrace{\frac{-25}{3}}_{\text{minorant}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{majorant}}$, (a_n) est bornée.

(a_n) est croissante :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2 - 25}{2(n+1)^2 + 1} - \frac{n^2 - 25}{2n^2+1} = \frac{n^2 + 2n - 24}{2n^2 + 4n + 3} - \frac{n^2 - 25}{2n^2+1}$$

$$= \frac{(n^2 + 2n - 24)(2n^2+1) - (2n^2 + 4n + 3)(n^2 - 25)}{(2n^2 + 4n + 3)(2n^2 + 1)}$$

$$= \frac{2n^4 + 4n^3 - 48n^2 + n^2 + 2n - 24 - 2n^4 - 4n^3 - 3n^2 + 50n^2 + 100n + 75}{(\ )(\ )}$$

$$= \frac{102n + 51}{\underbrace{(2n^2 + 4n + 3)}_{>0}\underbrace{(2n^2+1)}_{>1}} > 0 \quad \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0$$

(a_n) est strictement croissante.

b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{6}, \dots \right)$

c'est une suite alternée.

$$\underbrace{-1}_{\text{minorant}} < \frac{(-1)^n}{n+1} < \underbrace{1}_{\text{majorant}}$$

suite bornée, ni croissante, ni décroissante.

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \dots\right)$

$\underset{\text{minorant}}{-1} \leq c_n \leq \underset{\text{majorant}}{1}$

c'est une suite bornée ni croissante, ni décroissante.

d) $(1, 7, 17, 31, 49, \dots)$

c'est une suite minorée croissante : $d_n \geq 1$

$$d_{n+1} - d_n = \left(2(n+1)^2 - 1\right) - \left(2n^2 - 1\right)$$
$$= \underline{2n^2} + 4n + 2 - 1 - \underline{2n^2} + 1$$
$$= 4n + 2 > 0$$

Elle est strictement croissante.

e) La suite est donnée sous forme récurrente.

$\left(1, -1, -2, \frac{-5}{2}, \frac{-11}{4}, \frac{-23}{8}, \frac{-47}{16}, \frac{-95}{32}, \dots\right)$

$(1.0, -1.0, -2.0, -2.5, -2.75, -2.875, -2.9375, -2,96875, \dots)$

• La suite est décroissante. Démontrons-le par récurrence.

$\boxed{\text{Soit la relation } P(n) = U_n - U_{n-1} < 0, \text{ pour } n \geq 2}$

1°) P(2) est vraie : $U_2 - U_1 = -1 - 1 = -2 < 0$

2°) Vraie pour P(n) ⇒ Vraie pour P(n+1) :

Supposons que $U_n - U_{n-1} < 0$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 3}{2} - \frac{U_{n-1} - 3}{2} = \frac{\overbrace{U_{n-1} - U_n}^{<0}}{2} < 0$$

Donc la suite est décroissante.

Ainsi 1 est un majorant. Elle est minorée par -3.

En effet, $U_1 = 1 > -3$. Si $U_n > -3$, alors $U_{n+1} > -3$.

$$U_{n+1} = \frac{U_n - 3}{2} > \frac{-3-3}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$