Les nombres complexes – TE 800A

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	8	10	10	6	5	8	47
Points obtenus							

Problème 1 (8 points)
Écrire trois les nombres complexes ci-dessous sous la forme $a + b\,i$.

a) $(1+5i)\,(1-5i)-(1+i)^2$

b) $\dfrac{i}{3-4i}$

c) i^{323}

d) $\overline{(3+4i)(-3+2i)}-(5-5i)$

a) $1-25i^2-(1+2i+i^2) = 1+25-1-2i+1 = \underline{26-2i}$

b) $\dfrac{i}{3-4i}\cdot\dfrac{3+4i}{3+4i} = \dfrac{3i+4i^2}{9+16} = \underline{\dfrac{-4}{25}+\dfrac{3}{25}i}$

c) $i^{323} = i^{320}\cdot i^3 = (i^2)^{160}\cdot i^2\cdot i = \underline{-i}$

d) $\overline{(-9+6i-12i+8i^2)} - 5 + 5i = \overline{-17-6i} - 5 + 5i$

$= -17+6i-5+5i = \underline{-22+11i}$

Problème 2 (10 points)

Soit $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$.

a) Calculer $z + \overline{z}$ et $z \cdot \overline{z}$ et donner le résultat sous la forme algébrique $a + b\, i$.

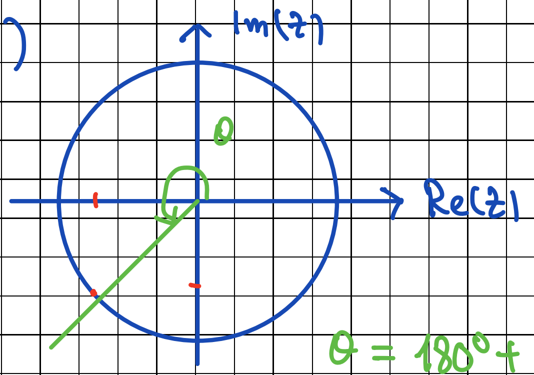
b) Donner z sous la forme trigonométrique $[r; \theta]$.

c) Soit $\omega = z^{10}$. Calculer la forme trigonométrique $[r; \theta]$ avec $0 \leqslant \theta < 2\pi$ et algébrique de ω.

a) $z + \overline{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = -\sqrt{2}$

$z \cdot \overline{z} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

b)



$z = \left[1; \frac{5\pi}{4}\right]$

$\theta = 180° + 45° = 225° = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

c) $z^{10} = \left[1^{10}; 10 \cdot \frac{5\pi}{4}\right] = \left[1; \frac{\pi}{2}\right] = i$

$\frac{50}{4}\pi = \frac{25}{2}\pi = \left(12 + \frac{1}{2}\right)\pi$

Problème 3 (10 points)
Soit l'équation complexe

$$z^4 = -16$$

a) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de cette équation.

b) Déterminer sous forme algébrique les solutions de cette équation.

c) Représenter dans le plan complexe les solutions de cette équation.

a) $z^4 = -16$

$-16 = [16; \pi] \Rightarrow w = [r, \theta]$, $w^4 = [r^4, 4\theta]$

$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$\underline{w_0 = [2; \frac{\pi}{4}]}$, $\underline{w_1 = [2; \frac{3\pi}{4}]}$, $\underline{w_2 = [2; \frac{5\pi}{4}]}$, $\underline{w_3 = [2; \frac{7\pi}{4}]}$

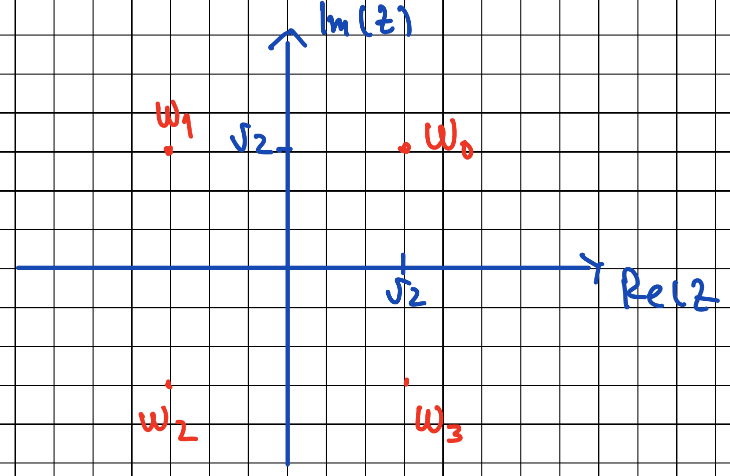
b) $w_0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \underline{\sqrt{2} + \sqrt{2} i}$

$w_1 = \underline{-\sqrt{2} + \sqrt{2} i}$

$w_2 = \underline{-\sqrt{2} - \sqrt{2} i}$

$w_3 = \underline{\sqrt{2} - \sqrt{2} i}$

c)



Problème 4 (6 points)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ci-dessous:

$$z^2 - (5i + 4)\, z + 7i - 1 = 0$$

et donner les solutions sous la forme $a + b\,i$.

$D = (5i+4)^2 - 4(-1+7i) = -9+40i+4-28i = -5+12i$

$d = a+bi$ tel que $d^2 = D$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ a^2 + b^2 = 13 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2b^2 = 18 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \pm 3 \\ ab = 6 \end{cases}$$

$d = 2+3i$ et $d = -2-3i$

$$z_1 = \frac{4+5i+2+3i}{2} = 3+4i$$

$$z_2 = \frac{4+5i-2-3i}{2} = 1+i$$

$S = \{1+i \,;\, 3+4i\}$

Problème 5 (5 points)
Factoriser dans $\mathbb{C}[z]$ le polynôme

$$p = z^4 - 2\,z^3 + 3\,z^2 - 2\,z + 2$$

sachant que i et $1+i$ en sont des zéros.

Factoriser ensuite p dans $\mathbb{R}[z]$.

Comme $p \in \mathbb{R}[z]$, alors $\overline{i} = -i$ et $\overline{1+i} = 1-i$ sont aussi des zéros.

$$p = \underline{(z-i)(z+i)(z-(1+i))(z-(1-i))} \quad \in \mathbb{C}[z]$$

$$p = (z^2+1)(z^2 - 2z + (1+i)(1-i))$$

$$p = \underline{(z^2+1)(z^2 - 2z + 2)} \quad \in \mathbb{R}[z]$$

Problème 6 (8 points)
Résoudre dans l'équation

$$z^4 - 5z^3 + (14+3i)z^2 - (13+16i)z - (3-11i) = 0$$

sachant que $z = i$ et $z = 2-3i$ sont des solutions de cette équation.

Par Horner :

	1	-5	$14+3i$	$-13-16i$	$-3+11i$
i		i	$-1-5i$	$2+13i$	$3-11i$
	1	$-5+i$	$13-2i$	$-11-3i$	0

	1	$-5+i$	$13-2i$	$-11-3i$
$2-3i$		$2-3i$	* $-12+5i$	** $11+3i$
	1	$-3-2i$	$1+3i$	0

* $(2-3i)(-3-2i) = -12+5i$

** $(2-3i)(1+3i) = 11+3i$

L'équation:

$$(z-i)(z-(2-3i))\Big(\underbrace{z^2-(3+2i)z+1+3i}_{D}\Big)$$

$$D = (3+2i)^2 - 4(1+3i) = 5+12i-4-12i = 1$$

$$z_1 = \frac{3+2i+1}{2} = 2+i \quad , \quad z_2 = \frac{3+2i-1}{2} = 1+i$$

$$S = \{\, i \,;\, 2-3i \,;\, 2+i \,;\, 1+i \,\}$$