2M8 – Vendredi 8 décembre 2023 Nom & prénom : ....

Fonctions, suites – TE 807A

Problème	1	2	3	4	5		**Total**
Points	6	6	4	3	6		25
Points obtenus							

Problème 1 (6 points)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5\,x - 3$.

a) Démontrer que f est bijective.

b) Déterminer la fonction réciproque ${}^r\!f$ de f.

a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tq $f(a) = f(b)$. Alors $5a - 3 = 5b - 3$

$\Leftrightarrow 5a = 5b \Leftrightarrow a = b$. Donc f est injective (1)

Soit $c \in \mathbb{R}$, il faut trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$.

$$5x - 3 = c$$
$$5x = c + 3$$
$$x = \frac{c+3}{5}$$

Donc $f\left(\frac{c+3}{5}\right) = c$, donc f est surjective. (2)

(1) et (2) montrent que f est bijective

b) ${}^r\!f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

est la fonction réciproque de f.

Problème 2 (6 points)

Soit la fonction $f : A \to B$, $x \mapsto \dfrac{x-1}{2x+3}$.

a) Déterminer $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ pour que f soit bijective.

b) Donner ensuite ${}^r f$.

a) On a $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Soit $a, b \in A$ tq $f(a) = f(b)$. On a :

$$\frac{a-1}{2a+3} = \frac{b-1}{2b+3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-1)(2b+3) = (b-1)(2a+3)$$

$$2ab - 2b + 3a - 3 = 2ab - 2a + 3b - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad a = b$$

Donc f est injective.

Soit $c \in B$, déterminons $x \in A$ tel que $f(x) = c$

$$\frac{x-1}{2x+3} = c \Leftrightarrow x - 1 = c(2x+3) \Leftrightarrow x - 2cx = 3c+1$$

$$\Leftrightarrow x(1-2c) = 3c+1 \Leftrightarrow x = \frac{1+3c}{1-2c}$$

Donc $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) On a : ${}^r f : B \longrightarrow A$

$$x \longmapsto \frac{1+3x}{1-2x}$$

Problème 3 (4 points)

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \dfrac{-2\,n+3}{n+1}$ est décroissante.

$$U_n - U_{n+1} = \frac{-2n+3}{n+1} - \frac{-2(n+1)+3}{(n+1)+1}$$

$$= \frac{-2n+3}{n+1} - \frac{-2n+1}{n+2} = \frac{(-2n+3)(n+2)-(-2n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{-2n^2-n+6+2n^2+n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Comme $U_n - U_{n+1} > 0$, (U_n) est décroissante.

Problème 4 (3 points)

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{2\,n+1}$ est bornée.

$$(U_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots \right)$$

$n = \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

Majoreè: $\dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{\cancel{n}^{\,1}}{2\cancel{n}} < \dfrac{1}{2}$, pour tout $n \geq 1$

Minorée: $\dfrac{n}{2n+1} > \dfrac{n}{2n+n} = \dfrac{\cancel{n}^{\,1}}{3\cancel{n}} = \dfrac{1}{3}$

OU $\quad U_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3n - 2n - 1}{3(2n+1)} = \dfrac{n-1}{3(2n+1)} \geq 0$, pour $n \geq 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} \leq U_n < \dfrac{1}{2}$, pour $n \geq 1$. Donc U_n est bornée

Problème 5 (6 points)
Une suite u_n converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$, on a

$$|u_n - \ell| < \epsilon$$

On considère la suite

$$u_n = \frac{3\,n}{n+6}$$

et on donne $\ell = 3$.

a) Si $\epsilon = 0.01$, calculer la valeur de N à partir de laquelle $|u_n - 3| < \epsilon = 0.01$.

b) Démontrer que cette suite converge vers $\ell = 3$ au sens de la définition donnée au début du problème.

a) $$\left| \frac{3n}{n+6} - 3 \right| < 0{,}01$$

$$\left| \frac{3n - 3(n+6)}{n+6} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{-18}{n+6} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{18}{n+6} < \frac{1}{100} \iff 1800 < n+6 \iff n > 1794$$

Posons $N = 1794$, donc pour tout $n > N$, on a bien que $|u_n - 3| < 0{,}01$

b) Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\left| \frac{3n}{n+6} - 3 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{3n - 3n - 18}{n+6} \right| < \varepsilon$$

$$\iff \frac{18}{n+6} < \varepsilon \iff \frac{18}{\varepsilon} < n + 6 \iff n > \frac{18}{\varepsilon} - 6$$

$\iff n > \dfrac{18 - 6\varepsilon}{\varepsilon}$. Posons $N = \left[\dfrac{18 - 6\varepsilon}{\varepsilon} \right]$. Pour tout $n > N$, $|u_n - 3| < \varepsilon$. Donc (u_n) converge vers 3.