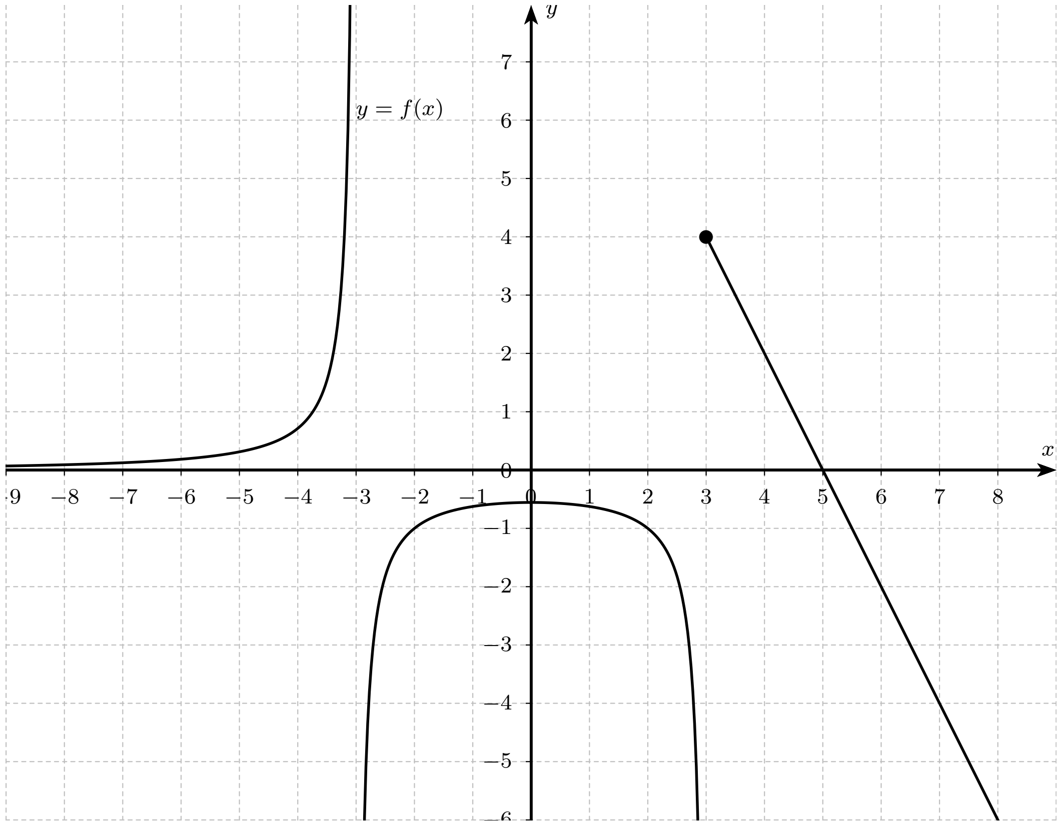
2M8 – Jeudi 25 janvier 2024 Nom & prénom : ....

Analyse : limites et fonctions – TE 809

Problème	1	2	3	4	Total
Points	6	12	8	14	40
Points obtenus					

Problème 1 (6 points)
Voici la représentation graphique d'une fonction $y = f(x)$ donnée en trois morceaux.



Lire sur le graphique les limites ci-dessous de la fonction $f(x)$ pour les valeurs données.

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ -1

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) =$ $+\infty$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) =$ 4

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) =$ $-\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ 0

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ $-\infty$

Problème 2 (12 points)
Calculer les limites suivantes en donnant toutes les étapes du calcul.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-3x-2}{6x^2-7x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{2x-4}$

a) $$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2-3x-2}{6x^2-7x-5} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{2}-2}{6\cdot\frac{1}{4}-7\cdot\frac{1}{2}-5} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

b) $$\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{3x-2}}{2x-4} \overset{\text{Ind}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{3x-2}}{2x-4}\cdot\frac{2+\sqrt{3x-2}}{2+\sqrt{3x-2}}$$

"$\frac{0}{0}$"

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4-(3x-2)}{(2x-4)(2+\sqrt{3x-2})} = \lim_{x\to 2} \frac{-3x+6}{(2x-4)(2+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-3\cancel{(x-2)}}{2\cancel{(x-2)}(2+\sqrt{3x-2})} = \frac{-3}{2\cdot 4} = \frac{-3}{8}$$

c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{7}{x^2+3x-10}\right)$

d) $\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\frac{1+\sqrt{x-2}}{x-2}$

c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{7}{x^2+3x-10}\right) \underset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{7}{(x+5)(x-2)}\right)$

$= \lim_{x\to 2}\frac{x+5-7}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+5)} = \underline{\frac{1}{7}}$

d) $\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\frac{1+\sqrt{x-2}}{x-2} \underset{\text{"}\frac{1}{0_+}\text{"}}{=} \underline{+\infty}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{3x}$

f) $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin(x)}{3\cos^2(x)}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{6\cdot\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{6}\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}_{=1} = \underline{\dfrac{1}{6}}$

f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)}{3\cdot\cos^2(x)} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)}{3\left(1-\sin^2(x)\right)}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cancelto{1}{1-\sin(x)}}{3\cancel{\left(1-\sin(x)\right)}\left(1+\sin(x)\right)} = \dfrac{1}{3\cdot 2} = \underline{\dfrac{1}{6}}$

Problème 3 (8 points)

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 2\,x - 3}$.

4 a) Déterminer une équation de l'asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$.

4 b) Etudier la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à son asymptote oblique

a) Par division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & & -1 & x^2-2x-3 \\ \cline{5-5} -\;\;(x^3 & -2x^2 & -3x) & & x+2 \\ \cline{1-3} & 2x^2 & +3x & -1 & \\ & 2x^2 & -4x & -6 & \\ \cline{2-4} \text{reste:} & & 7x & +5 & \end{array}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{7x+5}{x^2-2x-3}$$

AO : $\underline{y = x+2}$ 4

b) On étudie le signe de $\delta(x) = \dfrac{7x+5}{(x-3)(x+1)}$

$\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{7}$

x		-1		$-\frac{5}{7}$		3	
$\delta(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
Position	dessous	‖	dessus	$\boxed{\text{coupe}}$	dessous	‖	dessus

4

Problème 4 (14 points)

Soit la fonction définie par $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$.

3 a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

3 b) Déterminer le signe de f.

8 c) Déterminer toutes les asymptotes horizontales et obliques de la courbe $y = f(x)$.

a) Condition: $4x^2 - 5x + 1 \geq 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$, zéro de $4x^2 - 5x + 1$: $\frac{5 \pm 3}{8} = 1$ ou $\frac{1}{4}$

$4x^2 - 5x + 1 = (4x - 1)(x - 1)$

x		$1/4$		1	
$4x^2-5x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

$ED(f) = \left]-\infty; \frac{1}{4}\right] \cup \left[1; +\infty\right[$

b) zéro de f :

$$2x = \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \quad \Big| \; (\;)^2, \; x \in ED(f), \; x \geq 0$$
$$4x^2 = 4x^2 - 5x + 1$$
$$5x = 1$$
$$x = \frac{1}{5}$$

Vérification: • $2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

• $\sqrt{4 \cdot \frac{1}{25} - 1 + 1} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ } convient

x		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}$		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\boxed{\frac{1}{2}}$		$\boxed{2}$	$+$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 2$

c) A droite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 5x + 1}\right) \overset{\text{Ind}}{=} \infty - \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{4x^2-5x+1}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2-5x+1}\right)}{2x + \sqrt{4x^2(1+\ldots)}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 5x - 1}{2x + \underbrace{2x}_{>0}\sqrt{1+\ldots}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5\cancel{x}(1+\ldots)}{2\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1+\ldots}\right)}$$

$$= \frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{AHD : } y = \frac{5}{4}$$

4

A gauche : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - |2x|\sqrt{1+\ldots}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + 2x\sqrt{1+\ldots}\right)$

$= -\infty \quad \Rightarrow$ pas d'AHG

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 2x\sqrt{1+\ldots}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1+\ldots}\right)}{\cancel{x}_{1}}$$

$$= 4 \quad \Rightarrow \quad m = 4$$

$$h = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - 4x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{4x^2-5x-1} - 2x\right) \overset{\text{Ind}}{=} \text{"}-\infty + \infty\text{"}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(-\sqrt{4x^2-5x-1} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2-5x-1} - 2x\right)}{\sqrt{4x^2-5x-1} - 2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^2 + 5x + 1 + 4x^2}{\sqrt{4x^2(1+\ldots)} - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x(1+\ldots)}{-2x\sqrt{1+\ldots} - 2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5\cancel{x}(1+\ldots)}{-2\cancel{x}\left(\sqrt{1+\ldots} + 1\right)} = \frac{5}{-2 \cdot 2} = -\frac{5}{4}$$

$\Rightarrow$ ADG : $y = 4x - \frac{5}{4}$ 4