2M8 – Mercredi 13 mars 2024 Nom & prénom : ....

Analyse : calculs de dérivées – TE 813A

Problème	1	2	3	4	5	**Total**
Points	4	12	8	4	10	38
Points obtenus						

Problème 1 (4 points)
En utilisant la définition formelle, soit

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

et en donnant toutes les étapes, calculer le nombre dérivé $f'(3)$ par rapport à la fonction

$$f(x) = x^2 - 4\,x + 8$$

$$f(3) = 9 - 12 + 8 = 5$$

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+8-5}{x-3} \overset{\text{Ind}}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}^{1}(x-1)}{\cancel{x-3}_{1}}$$

$$= \lim_{x\to 3} (x-1) = 2$$

Problème 2 (12 points)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \underbrace{(x^2 - 5\,x)}_{u}\underbrace{(2\,x + 8)^2}_{v}$

b) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^3}$

$u' = 2x - 5$; $v' = 2(2x+8)\cdot 2$
$= 8(x+4)$

a) $f'(x) = (2x-5)(2x+8)^2 + (x^2 - 5x)\cdot 2(2x+8)\cdot 2$

$= (2x+8)\left[(2x-5)(2x+8) + 4(x^2-5x)\right]$

$= (2x+8)\left[4x^2 - 10x + 16x - 40 + 4x^2 - 20x\right]$

$= \underline{(2x+8)(8x^2 - 14x - 40)}$

b) $u = 1 + x^2$, $u' = 2x$

$v = 1 + x^3$, $v' = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^3) - (1+x^2)\cdot 3x^2}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{x\left[2(1+x^3) - 3x(1+x^2)\right]}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{x\left[2 + 2x^3 - 3x - 3x^3\right]}{(1+x^3)^2} = \frac{x(-x^3 - 3x + 2)}{(1+x^3)^2}$$

$$= \underline{\frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(1+x^3)^2}}$$

c) $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{2\,x}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{\cos(\pi\,x)}$

c) $\left(\frac{\pi}{2x}\right)' = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-\pi}{2x^2}$

$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \cdot \frac{-\pi}{2x^2} = \underline{\frac{-\pi}{2x^2} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)}$

d) $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

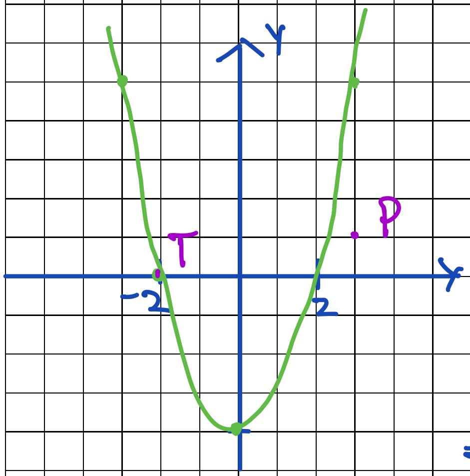
$f'(x) = \frac{-\sin(\pi x) \cdot \pi}{2\sqrt{\cos(\pi x)}} = \underline{\frac{-\pi \sin(\pi x)}{2\sqrt{\cos(\pi x)}}}$

Problème 3 (8 points)
Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4$.

a) Calculer l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $T(-2\,;\,0)$.

b) Déterminer les équations des tangentes à la courbe $y = f(x)$ issues du point $P(3\,;\,1)$.

a) $f(-2) = 0$, donc T est sur la courbe $y = f(x)$



$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-2) = -4$

$\Rightarrow$ tangente : $y = -4x + h$

$\Rightarrow$ Par $T(-2;0)$: $0 = 8 + h \Rightarrow h = -8$

$\Rightarrow$ tangente : $y = -4x - 8$

b) • $f(3) = 9 - 4 = 5$, donc P n'est pas sur la courbe.

• tangente(s) : $y = mx + h$

$\Rightarrow$ par $P(3;1)$: $1 = 3m + h \Rightarrow h = -3m + 1$

• $K(a, a^2 - 4)$ point(s) de contact entre la tangente et la courbe $\Rightarrow$ pente : $f'(a) = 2a = m$

• tangente : $y = 2ax - 6a + 1$

• Par $K(a, a^2-4)$: $a^2 - 4 = 2a \cdot a - 6a + 1 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0$

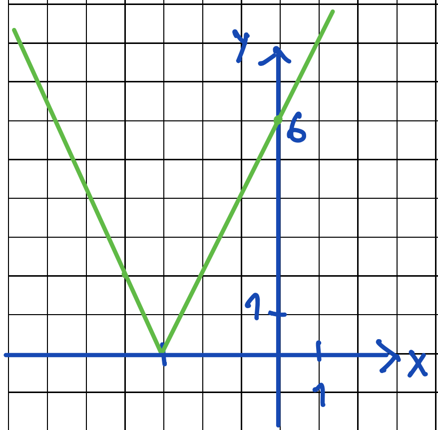
$\Rightarrow (a-5)(a+1) = 0$

$a = 5$: $y = 10x - 29$

$a = 1$: $y = 2x - 5$

Problème 4 (4 points)
La fonction $f(x) = | 2\,x + 6 |$ est-elle dérivable en $x = -3$? Justifier !

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6 & , \text{ si } x \geq -3 \\ -2x-6 & , \text{ si } x < -3 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ si } x > 3 \\ -2 & , \text{ si } x < 3 \end{cases}$$

$f'(-3)$ n'existe pas. On a

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x >}} f'(x) = 2$$

et

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} f'(x) = -2$$

Problème 5 (10 points)
Soit la fonction $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $ED(f)$ de $f(x)$.

b) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{2\,x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Étudier la croissance de la fonction $f(x)$. Déterminer les coordonnées de ses éventuels extrema.

2 a) $1 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-1\,;1]$

$ED(f) = [-1; 1]$

3 b) $u = 1 - x \quad , \quad u' = -1$

$v = \sqrt{1-x^2} \quad , \quad v' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2) - x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-1 + x^2 - x + x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$ED(f') =]-1; 1[$

5 c) zéros de $f'(x)$:

$2x^2 - x - 1 = 0$

$(2x+1)(x-1) = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 1$

ne convient pas

$$\left[\text{en fait } \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(2x+1)\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} \cdot \sqrt{1-x^2} = 0\right]$$

tg horizontale en $x = 1$

x		-1		$-\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$		$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	
$f(x)$		min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	

$f(-1) = 0$

$f(1) = 0$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\cong 1.299$

min $(-1 ; 0)$

min $(1 ; 0)$

max $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$