Géométrie I – TE 816A

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	10	8	8	6	10	42
Points obtenus						

Problème 1 (10 points)

a) Donner une équation paramétrique vectorielle de la droite d passant par les points $A(-5;2)$ et $B(8;0)$.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \end{pmatrix}$

$(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Donner une équation cartésienne de la droite n perpendiculaire à la droite $(b) : -x + 2\,y = -2$ passant par le point $P(3;5)$.

$(n) : \quad 2x + y + c = 0$

Par $P(3;5)$: $6 + 5 + c = 0 \Rightarrow c = -11$

$(n) : \quad 2x + y - 11 = 0$

c) Donner une équation cartésienne de la droite a.

$$(a) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 3k \\ y = -4 + 5k \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} \right.$$

$$5x + 3y = 13$$

$$(a) : 5x + 3x - 13 = 0$$

d) Calculer les coordonnées du symétrique du point $T(-2; 15)$ relativement à la droite $(d) : 3\,y + 3 = 2\,x$.

$$(d) : 2x - 3y - 3 = 0$$

$$(p) : 3x + 2y + c = 0 \qquad (p) : 3x + 2y - 24 = 0$$

Par $T(-2; 15)$: $-6 + 30 + c = 0 \Rightarrow c = -24$

$$d \cap p : \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + 2y = 24 \end{cases} \begin{array}{c|c|c} & x & y \\ & \cdot 3 & \cdot 2 \\ & \cdot(-2) & \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} -13y = -39 \\ 13x = 78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \qquad M(6, 3)$$

T' symétrique, M milieu de TT'

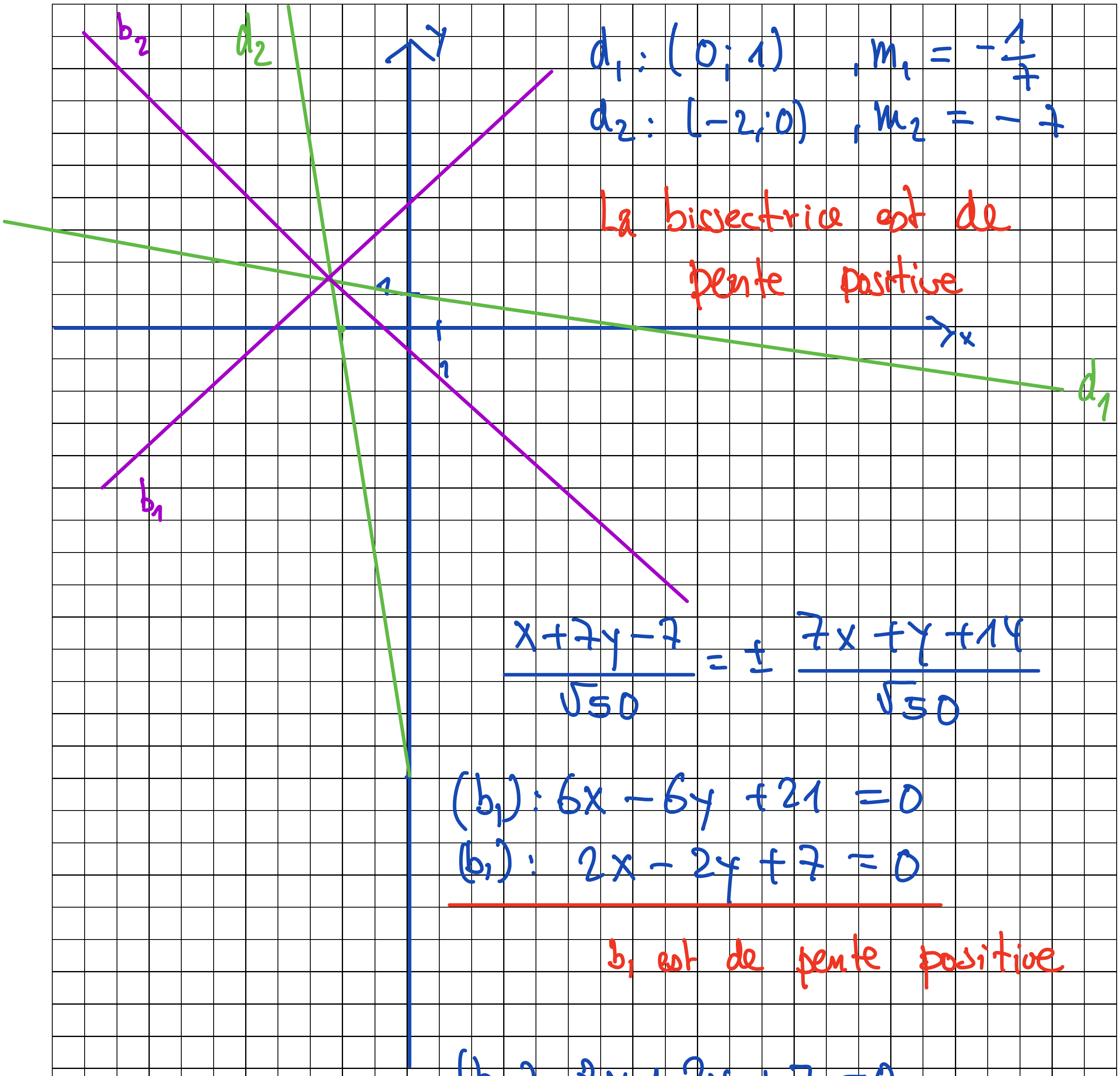
$$T'(a, b) : \begin{cases} 6 = \frac{1}{2}(-2 + a) \Rightarrow a = 14 \\ 3 = \frac{1}{2}(15 + b) \Rightarrow b = -9 \end{cases} \qquad T'(14, -9)$$

Problème 2 (8 points)
On considère les deux droites

$$(d_1): \ x + 7\,y - 7 = 0 \quad \text{et} \quad (d_2): \ 7\,x + y + 14 = 0$$

Trouver les équations des bissectrices de ces deux droites.

Laquelle des deux est celle de la bissectrice de l'angle obtus?



$d_1 : (0;1)$, $m_1 = -\frac{1}{7}$

$d_2 : (-2;0)$, $m_2 = -7$

La bissectrice est de pente positive

$$\frac{x+7y-7}{\sqrt{50}} = \pm \frac{7x+y+14}{\sqrt{50}}$$

$(b_1): 6x - 6y + 21 = 0$

$(b_1): \ 2x - 2y + 7 = 0$

b_1 est de pente positive

$(b_2): 8x + 8y + 7 = 0$

Problème 3 (8 points)
On considère :

- le cercle γ_1 de centre C_1, de rayon r_1 et d'équation $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$.
- le cercle γ_2 de centre C_2, de rayon r_2 et d'équation $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$.

a) Donner les coordonnées de C_1 et de C_2. Donner également r_1 et r_2.

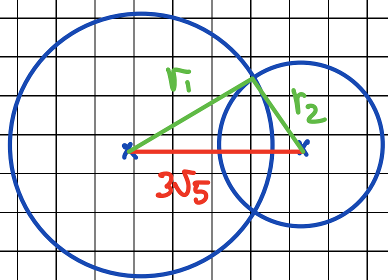
b) Déterminer si ces deux cercles ont des points d'intersection. Si oui en combien de points se coupent-ils ?

a) (γ_1) : $x^2 + (y+3)^2 = 25$ $\quad C_1(0;-3)$, $r_1 = 5$

(γ_2) $(x-6)^2 + y^2 = 4$ $\quad C_2(6;0)$, $r_2 = 2$

b) $\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $\quad \|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$r_1 + r_2 = 7$



$3\sqrt{5} \cong 6.71 < r_1 + r_2$

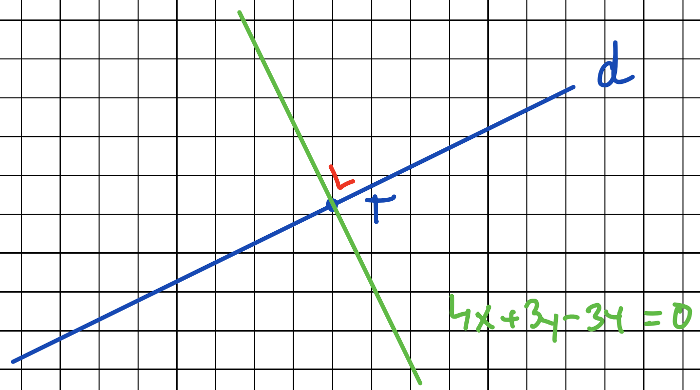
Les cercles sont sécants.

Problème 4 (6 points)
Déterminer des équations des cercles de rayon 10 qui sont tangents à la droite $(d):\ 3x-4y+\mathbf{12}=0$ au point $T(?\,;\mathbf{6})$.

① Abscisse de T : $3x-4\cdot 6+12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$

$T(4,6)$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $\|\vec{n}\|=5$



② Centre des cercles :

$\vec{OC_1}=\vec{OT}+2\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$; $C_1(10;-2)$

$\vec{OC_2}=\vec{OT}-2\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\14\end{pmatrix}$; $C_2(-2;14)$

③ Equation des cercles

$(\gamma_1):\quad (x-10)^2+(y+2)^2=100$

$(\gamma_2):\quad (x+2)^2+(y-14)^2=100$

Problème 5 (10 points)

Un triangle est donné par ses sommets $A(-3\,;\,-11)$, $B(4\,;\,10)$ et $C(-9\,;\,1)$

Déterminer, par calcul, une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le centre du cercle circonscrit se trouve à l'intersection des médiatrices.

① m_{AB} : $C'\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$; $\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\21\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

(m_{AB}) : $x+3y+c=0$

par C' : $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + c = 0 \Rightarrow c = 1$

(m_{AB}) : $x+3y+1=0$

② m_{BC} : $A'\left(-\frac{5}{2}\,;\,\frac{11}{2}\right)$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix}-9\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\-9\end{pmatrix}$

(m_{BC}) : $13x+9y+c=0$

par A' : $-\frac{65}{2} + \frac{99}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{34}{2} = -17$

(m_{BC}) : $13x+9y-17=0$

③ m_{AC} : $B'(-6\,;-5)$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-9\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

(m_{AC}) : $x-2y+c=0$

par B' : $-6+10+c=0 \Rightarrow c=-4$

(m_{AC}) : $x-2y-4=0$

④ Centre du cercle circonscrit :

$$\begin{array}{l} (m_{AC}) : \\ (m_{BC}) : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ x + 3y = -1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} x \\ \cdot (-1) \\ \cdot 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} y \\ \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5y = -5 \\ 5x = 10 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{K(2;-1)}$$

⑤ Rayon du cercle circonscrit :

$$\overrightarrow{KA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\|\overrightarrow{KA}\| = 5\sqrt{5}}$$

⑥ Cercle circonscrit:

$$\underline{(\gamma) : \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 125}$$