01.11.23

2.3.3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2 - 5x + 4}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) Condition : $(x-1)(x-5) \geqslant 0$

signe de $(x-1)(x-5)$:

x		1		5		
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$	1
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$	5
$(x-1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$ED(f) = \left]-\infty ; 1\right] \cup \left[5, +\infty\right[$

f) $1 - x^2 > 0$

$ED(f) = \left]-1 ; 1\right[$

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

2.3.5 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(7 - 2x)$

b) $f(x) = e^{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{3 - x}{1 - \log(x)}$

d) $f(x) = 3^{1/(x+2)}$ $x \neq -2$

e) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2 + x}{3 - x}\right)$

f) $f(x) = 10^{-x}$

a) $\ln(u)$ existe si et seulement si $u > 0$

$f(x) = \ln(7 - 2x)$

<u>condition</u> :

$$\begin{aligned} 7 - 2x &> 0 && \Big|\ -7 \\ -2x &> -7 && \Big|\ \div(-2) \\ x &< \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$ED(f) = \left]-\infty ; \frac{7}{2}\right[$

b) a^u existe pour tout $u \in \mathbb{R}$

$ED(f) = \mathbb{R}$

c) conditions : 1) $x > 0$ ✓

2) $1 - \log(x) \neq 0$

$\log(x) = 1$

$x = 10$ ✓

$$\begin{aligned} ED(f) &=]0 ; 10[\cup]10 ; +\infty[\\ &=]0 ; +\infty[- \{10\} \\ &= \mathbb{R}_+^* - \{10\} \end{aligned}$$

e) $f(x) = \log_2\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$

condition : $\frac{2+x}{3-x} > 0$

x		-2		3	
$2+x$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$
$3-x$	$+$		$+$	$\|\|$	$-$
$\frac{2+x}{3-x}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

$ED(f) =]-2\,;\,3[$

2.3.6 Calculer dans chaque cas la valeur de $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ et $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Donner ensuite les ensembles de définition des fonctions $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ et $\frac{f}{g}$.

a) $f(x) = 3$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+5}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{4x}$

d) $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln(1-x)$

f , $ED(f)$

g , $ED(g)$

$$\boxed{ED(f+g) = ED(f-g) = ED(f\cdot g) = ED(f) \cap ED(g)}$$

a) $ED(f+g) = \mathbb{R}$; $ED(f-g) = \mathbb{R}$; $ED(f\cdot g) = \mathbb{R}$; $ED\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^*$

$ED(f) = \mathbb{R}$, $ED(g) = \mathbb{R}$

b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

$ED(g) = \mathbb{R} - \{-5\}$

$ED(f+g) = \mathbb{R} - \{4; -5\}$

$ED(f-g) = \mathbb{R} - \{4; -5\}$

$ED(f\cdot g) = \mathbb{R} - \{4; -5\}$

$ED\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{4; -5; 0\}$

↑ zéro de $g(x)$

$$\boxed{ED\left(\frac{f}{g}\right) = ED(f) \cap ED(g) - Zeros(g)}$$

d) $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln(1-x)$

$ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

$ED(g) =]-\infty ; 1[$

- $ED(f+g)$, $ED(f-g)$, $ED(f\cdot g)$ $=]0 ; 1[$

- zéro de g : $x = 0$

$\ln(u) = 0 \iff u = 1$

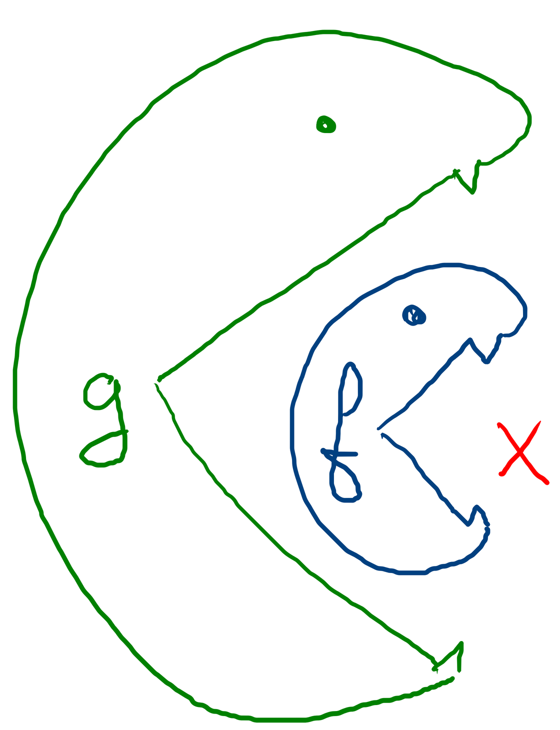
$ED\left(\frac{f}{g}\right) =]0 ; 1[$

Composition de deux fonctions

$f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 1 + x^2$

$ED(f) = \mathbb{R}_+$ et $ED(g) = \mathbb{R}$

- $g\big(\underbrace{f(4)}_{2}\big) = g(2) = 5 = g \circ f(4)$
- $f\big(\underbrace{g(4)}_{17}\big) = f(17) = \sqrt{17} = f \circ g(4)$



$= g \circ f(x)$

Quelle est la fonction qui représente $g \circ f(x)$?

$$x \xmapsto{f} \sqrt{x} \xmapsto{g} 1 + (\sqrt{x})^2$$

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + x \end{array}$$

Quelle est la fonction qui représente $f \circ g(x)$?

$$x \xmapsto{g} 1 + x^2 \xmapsto{f} \sqrt{1 + x^2}$$

$$f \circ g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1 + x^2} \end{array}$$