2.5.8 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 2.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

a)

a) Montrons que (U_n) est croissante. Montrons-le par récurrence.

- Vrai pour $n = 1$: montrons que $U_2 - U_1 \geq 0$

$$U_2 - U_1 = \sqrt{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\underbrace{\sqrt[4]{2}}_{>1} - 1) > 0$$

- Supposons que $U_n - U_{n-1} \geq 0$ et montrons que $U_{n+1} - U_n \geq 0$.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n} - \sqrt{2U_{n-1}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{U_n} - \sqrt{U_{n-1}}\right) > 0$$

Comme $U_n > U_{n-1}$, donc $\sqrt{U_n} > \sqrt{U_{n-1}}$

Donc (U_n) est croissante

Démontrons à présent que la suite (U_n) est majorée par 2.

Suite le 01, 12, 23

Par récurrence, montrons que $u_n \leq 2$.

1) $u_1 = \sqrt{2} \leq 2$

2) Supposons que $u_n \leq 2 \Rightarrow u_{n+1} \leq 2$

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\sqrt{u_n}}_{\leq 2} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par 2, elle est convergente.

b) Soit ℓ la limite de cette suite : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$

$$\underbrace{\lim_{n \to \infty} u_{n+1}}_{\ell} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{2u_n}$$

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{2}\sqrt{u_n}\right)$$

$$\ell = \sqrt{2} \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{u_n}\right)$$

$$\ell = \sqrt{2}\sqrt{\ell} \qquad \Big|\ (\ )^2 \qquad \sqrt{2} \leq \ell \leq 2$$

$$\ell^2 = 2\ell \qquad \Big|\ \div \ell \qquad \ell \neq 0$$

$$\ell = 2$$

Donc (u_n) converge vers 2.

2.5.9 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par 0.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

a) $\left(\underset{u_1}{2}, \underset{u_2}{\frac{2}{3}}, \underset{u_3}{\frac{2}{5}}, \underset{u_4}{\frac{2}{7}}, \right.$

Cette suite est décroissante. En effet

$$U_n - U_{n+1} = U_n - \frac{U_n}{U_n+1} = \frac{U_n(U_n+1) - U_n}{U_n+1} = \frac{U_n^2 + U_n - U_n}{U_n+1} = \frac{U_n^2}{U_n+1}$$

Comme $U_n > 0$, alors $U_{n+1} > 0$, donc $U_n - U_{n+1} > 0$

Cette suite est minorée par 0. Tous les termes de la suite sont supérieurs à 0

Cette suite est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

b) Soit ℓ cette limite.

$$\ell = \frac{\ell}{\ell+1} \quad \Big| \cdot (\ell+1) \qquad \ell \neq -1$$

$$\ell(\ell+1) = \ell$$

$$\ell^2 + \ell = \ell$$

$$\ell^2 = 0$$

$$\ell = 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$