03.11.23

2.3.19 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre :

a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2$

c) $f(x) = 5$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{2x}$ $\qquad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x}{x-2}$

i) $f(x) = \sqrt{x}$

k) $f(x) = |x^3 - 3x| + 1$

m) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

e) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = \frac{3x^2 - 2}{-2x} = -\frac{3x^2 - 2}{2x} = -f(x) \Rightarrow f \text{ impaire}$$

g) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$f(-x) = \frac{-x}{-x+2} + \frac{-x}{-x-2} = \frac{x}{x-2} + \frac{x}{x+2} = f(x) \Rightarrow f \text{ est paire}$$

i) $ED(f) = [0; +\infty[$

ni paire, ni impaire puisque $ED(f)$ n'est pas symétrique.

h) $f(x) = x^6 + 3x^2 - \frac{1}{x}$

$ED(f) = \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = x^6 + 3x^2 - \frac{1}{-x} = x^6 + 3x^2 + \frac{1}{x} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

Fonction injective, surjective

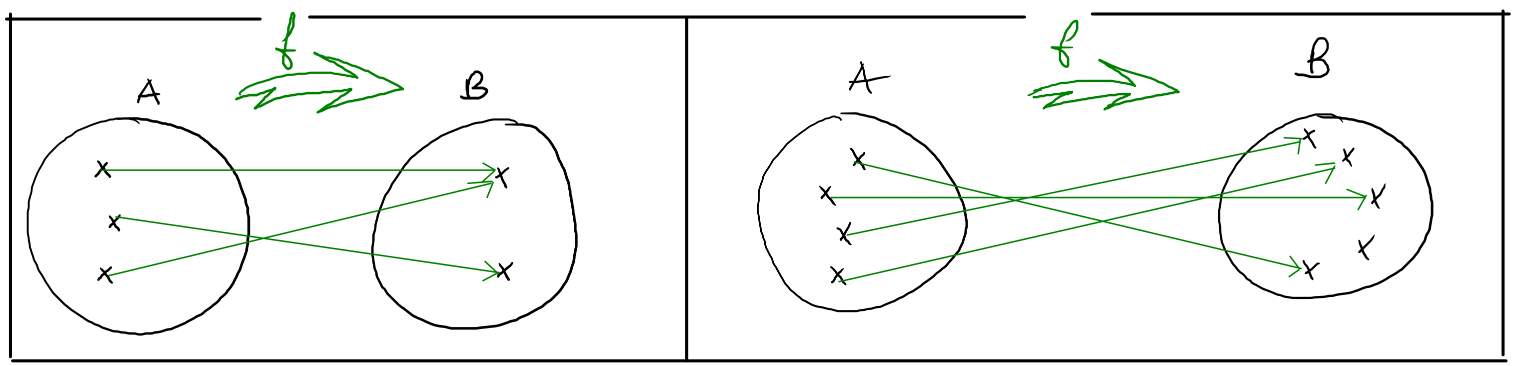
Soit f une fonction définie sur un ensemble A.

$$f : A \longrightarrow B$$

A, B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

① f est injective si $f(a) = f(b)$ si et seulement si $a = b$

② pour tout $y \in B$, il existe au moins un $x \in A$ tel que $f(x) = y$

① ②


pas injective — injective

surjective — non surjective

On dit que $f(a)$ est l'image de a par f.

On dit que a est la pré-image de $f(a)$.

On appelle image de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in B \;\middle|\; \text{il existe } x \in A \text{ avec } f(x) = b \right\}$

Lorsqu'une fonction est injective et surjective, on dit qu'elle est bijective.

2.4.1 Déterminer les applications injectives, surjectives ou bijectives.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$

a) <u>Injection</u> : f_1 est injective. En effet, soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $f_1(a) = f_1(b)$.
Montrons que $a = b$.

$$\begin{array}{rcl|l} 2a+1 & = & 2b+1 & -1 \\ 2a & = & 2b & \div 2 \\ a & = & b & \end{array}$$

Donc $f_1(a) = f_1(b) \iff a = b$

<u>Surjection</u> : $f_1(x) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z}$

f_1 n'est surjective

b) $$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Pas injectif : $f(2) = f(-2) = 4$

Pas surjectif -2 , $f(x) = -2$ n'a pas de solution.