4.2.29 La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique. Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h = \frac{40}{1 + 200\, e^{-0,2t}}$$

a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

06.06.24

$$h = h(t) = \frac{40}{1 + 200\, e^{-0,2t}}$$

a) $h(30) = \frac{40}{1+200 \cdot e^{-6}} \cong \frac{40}{1,5} \cong 26,66$ [m]

a.1) $h(0) = \frac{40}{201} \cong \frac{40}{200} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2$ [m]

b) $h(t) = 16 \iff \frac{40}{1+200\, e^{-0,2t}} = 16$ $\quad | \cdot (1+200\, e^{-0,2t})$

$40 = 16\left(1 + 200\, e^{-0,2t}\right)$ $\quad | \div 16$

$2.5 = 1 + 200\, e^{-0,2t}$ $\quad | -1$

$1,5 = 200\, e^{-0,2t}$ $\quad | \div 200$

$\frac{3}{400} = e^{-0,2t}$

$\boxed{\begin{array}{l} \ln(e^u) = u \\ e^{\ln(u)} = u \end{array}}$

$-0,2t = \ln\left(\frac{3}{400}\right)$

$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$

$t = -\frac{\ln(3/400)}{0,2} \Rightarrow t = \frac{\ln(400) - \ln(3)}{0,2} \cong 24,5$ [ans]

c) Pour déterminer le max de $h(t)$, on détermine le signe de sa dérivée.

$$h = \frac{40}{1+200\,e^{-0{,}2t}} = 40\,\frac{1}{1+200\,e^{-0{,}2t}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}}$$

$$u = 1 + 200\,e^{-0{,}2t}$$

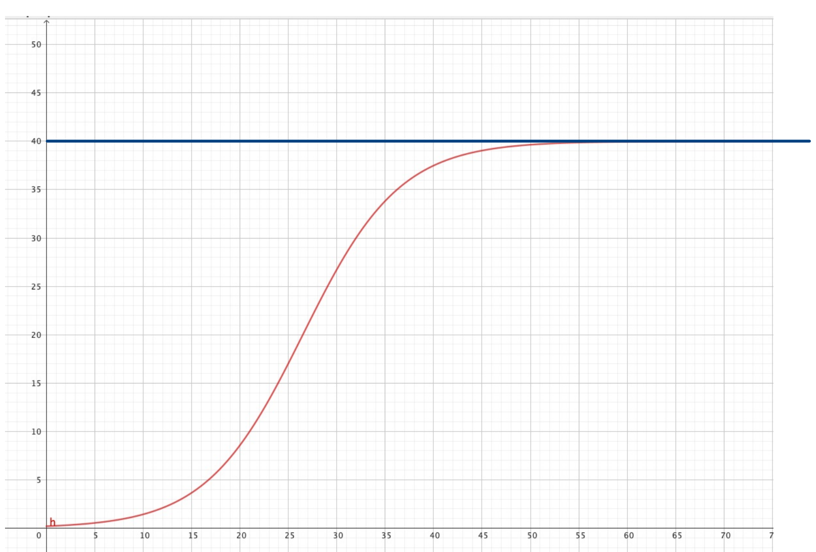
$$u' = 0 + 200\,e^{-0{,}2t}\cdot(-0{,}2) = -40\,e^{-0{,}2t}$$

$$h'(t) = 40\,\frac{40\,e^{-0{,}2t}}{(1+200\,e^{-0{,}2t})^2} = \frac{1600\,e^{-0{,}2t}}{(1+200\,e^{-0{,}2t})^2} > 0$$

Comme $h'(t) > 0$, $h(t)$ est strictement croissante

Le max, s'il existe, est atteint pour une valeur de t très grande

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{40}{1+200\,\underbrace{e^{-0{,}2t}}_{\to 0}} = \frac{40}{1+0} \quad 40 \quad [m]$$



AH

$Y = 40$

4.2.30 La grippe se propage à partir d'un individu malade dans une population de 1'000 personnes. On admet que le nombre de personnes qui sont ou ont été atteintes par la grippe après t jours est $N = \frac{1'000}{1+999\cdot 10^{-0,17t}}$.

a) Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?

b) Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?

c) Quel est le maximum de personnes qui peuvent être atteintes par la grippe ?

$$N(t) = \frac{1'000}{1+999\cdot 10^{-0,17t}}$$

a) $N(20) = \dfrac{1000}{1+999\cdot 10^{-0,17\cdot 20}} \cong 715$ personnes atteintes après 20 jours

b) Par a), je dois trouver moins de 20 jours

$$\frac{1'000}{1+999\cdot 10^{-0,17t}} = 600 \iff \frac{5}{3} = 1+999\cdot 10^{-0,17\,t}$$

$$10^{-0,17t} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{999}$$

$$-0,17t = \log\left(\frac{2}{2997}\right)$$

$$t = \frac{-1}{0,17}\cdot\log\left(\frac{2}{2997}\right) \cong 18,68$$

$$t = 19 \text{ [jours]}$$

c) On a $N(0) = 1$

Au temps $t=0$, une personne contaminée.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1000}{1+999\,\underbrace{e^{-0,17t}}_{\to 0}} = \frac{1000}{1+0} = 1000$$

Lorsque $t \to +\infty$, toute la population est malade.

4.2.31 En 1980, la population des USA était d'environ 227'000'000 habitants et en 1990 d'environ 248'710'000 habitants. Des sociologues prédisent que la population des USA se rapprochera de 500 millions, mais ne dépassera jamais cette valeur.

a) A l'aide du modèle logistique, donner la population N des USA t années après 1980.

b) Quelle fut la population de ce pays en l'an 2000 ?

a)

Année	Population
1980	$2,27 \cdot 10^8$
1990	$2,4871 \cdot 10^8$
2000	?

$$\boxed{N = N(t) = \frac{L N_0}{N_0 + (L - N_0) e^{kt}}}$$

A déterminer N_0, K, L

$$\boxed{N(t) = \frac{L}{1 + \frac{L - N_0}{N_0} e^{-kt}}}$$

Chatgpt

$N_0 = 2,27 \cdot 10^8$

$L = 5 \cdot 10^8$

$L - N_0 = 2,73 \cdot 10^8$

$$N(t) = \frac{1,135 \cdot 10^{17}}{2,27 \cdot 10^8 + 2,73 \cdot 10^8 e^{kt}}$$

$$N(10) = 2,4871 \cdot 10^8 \overset{\text{calcul}}{\Rightarrow} K = -0,0174$$

$$N(t) = \frac{1,135 \cdot 10^{17}}{2,27 \cdot 10^8 + 2,73 \cdot 10^8 \cdot e^{-0,0174 t}}$$

b) $N(20) \cong \dfrac{1,135 \cdot 10^{17}}{2,27 \cdot 10^8 + 2,73 \cdot 10^8 \cdot e^{-0,34}} \cong 270'439'855$

Selon ce modèle, la population américaine en l'an 2000 valait environ 270'439'855 habitants