06. 12. 23

2.5.10 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que $u_n < 4$, pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (4 - u_n)(3 + u_n)$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

a) Par récurrence sur n.

① Initialisation : $U_1 = 1 < 4$

② Supposons $U_n < 4$ et démontrons que $U_{n+1} < 4$

$U_{n+1} = \sqrt{12 + U_n} < \sqrt{12 + 4} = 4 \Rightarrow U_{n+1} < 4$

b) $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \left(\sqrt{12 + U_n}\right)^2 - U_n^2 = 12 + U_n - U_n^2 = -U_n^2 + U_n + 12$

$= (4 - U_n)(3 + U_n)$

$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \underbrace{(4 - U_n)}_{>0}\underbrace{(3 + U_n)}_{>0} > 0$

Ainsi $U_{n+1}^2 - U_n^2 = (U_{n+1} - U_n)(U_{n+1} + U_n) > 0$

Comme $U_{n+1} + U_n > 0$, ainsi $U_{n+1} - U_n > 0$, donc (U_n) est croissante

c) Toute croissante et bornée supérieurement est convergente.

Calculons sa limite. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} U_{n+1}}_{\ell} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{12 + U_n}$$

$$\ell = \sqrt{12 + \lim_{n\to\infty} U_n}$$

$\ell = \sqrt{12 + \ell}$ | $(\ )^2$, $\ell > 0$

$\ell^2 = 12 + \ell$ | $-12 - \ell$

$\ell^2 - \ell - 12 = 0$

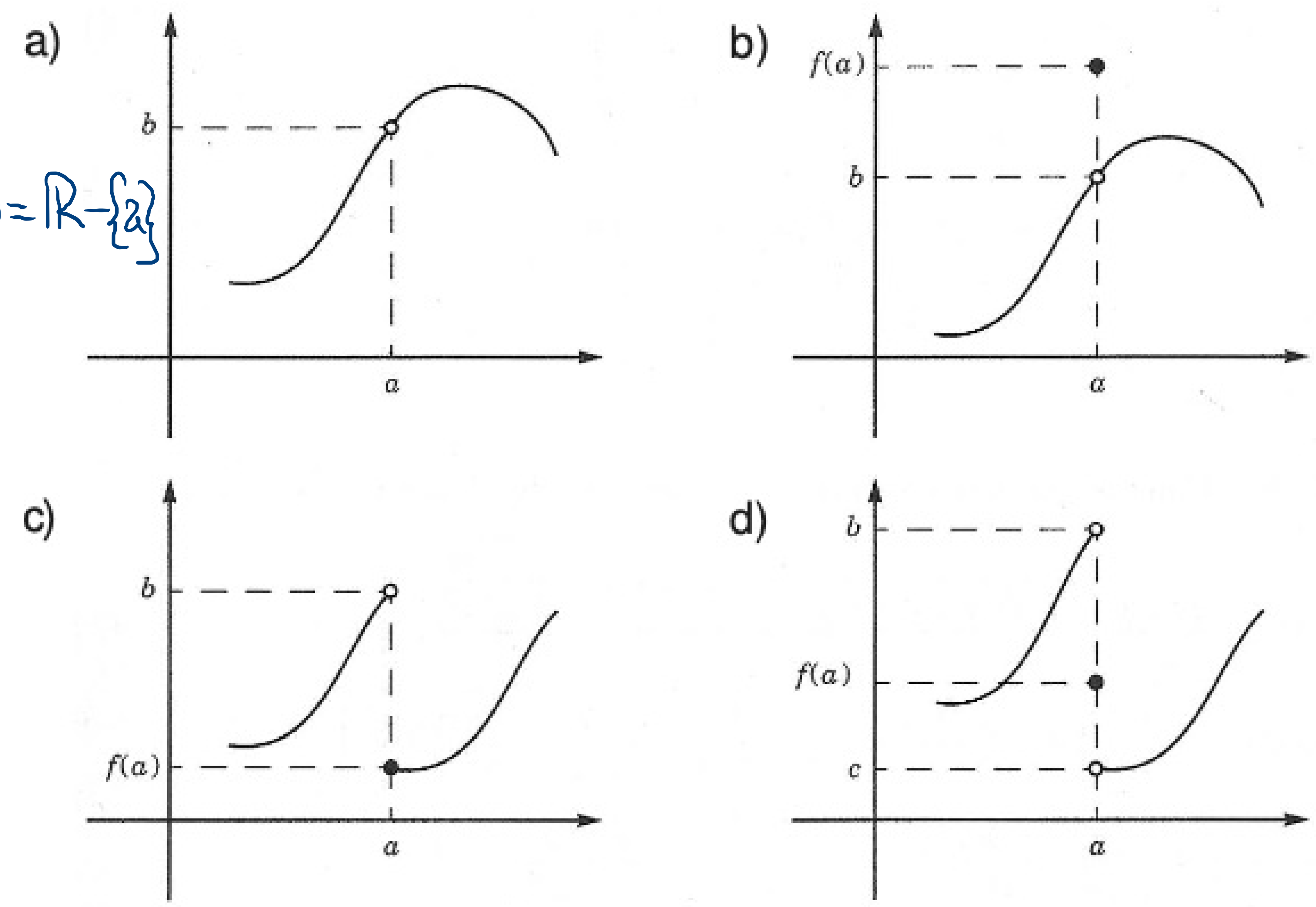
$(\ell - 4)(\ell + 3) = 0$

$\ell = 4$ $\quad$ $\ell = -3$ ne convient pas !

Donc la suite converge vers 4.

2.6.1 Lire les limites : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

$ED(f) = \mathbb{R} - \{a\}$



	a)	b)	c)	d)
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$	b	b	b	b
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$	b	b	a	c
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	b	$b \neq f(b)$	—	—

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

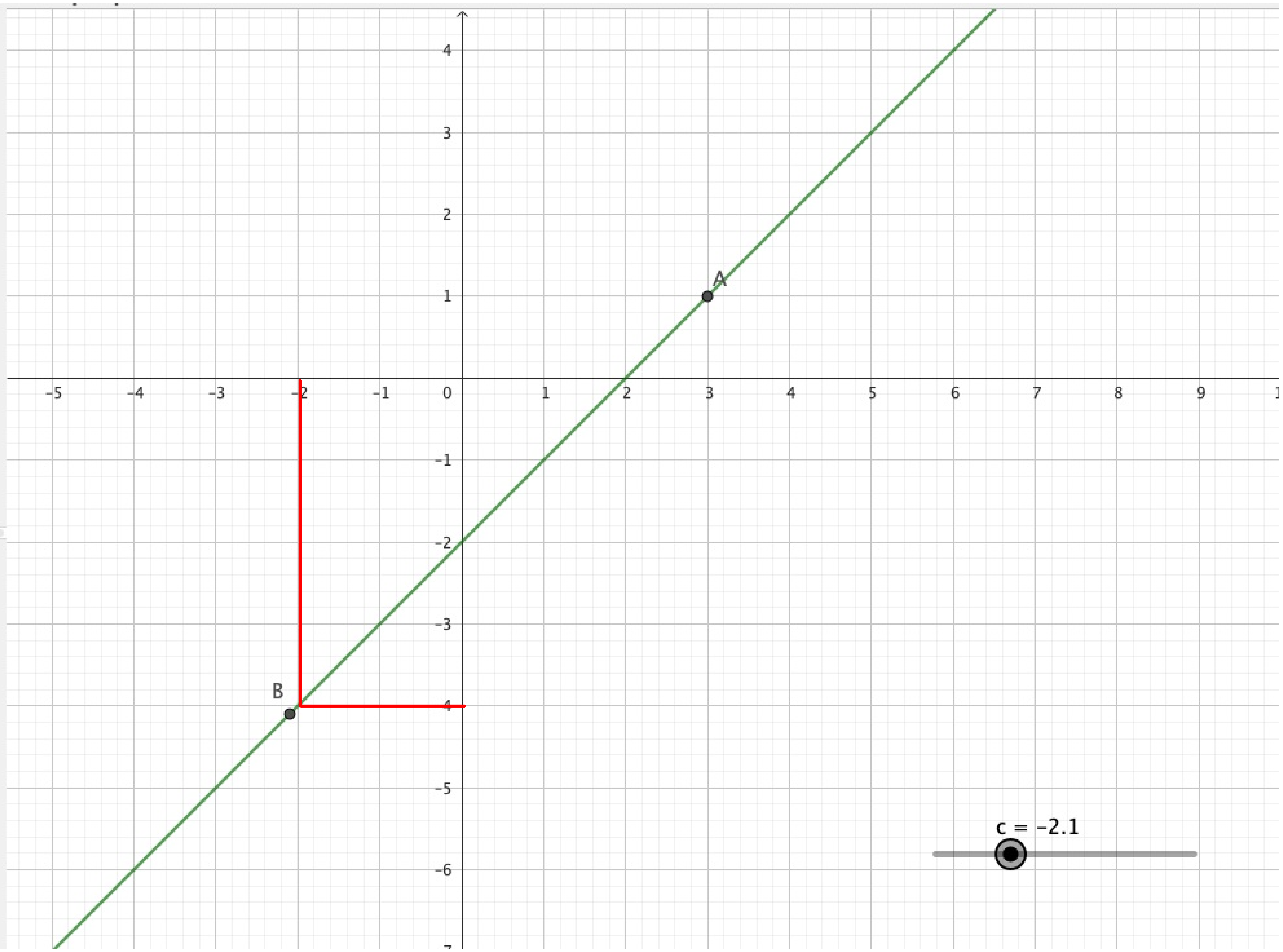
$A = (3, 1)$

$a = 1$

$b = ?$

$c = -2.1$

$B = (-2.1, -4.1)$



$$\lim_{x \to -2} f(x) = -4$$

Illustration

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

Que se passe-t-il si x prend des valeurs proches de 2 ?

$$\left.\begin{array}{l} f(2{,}01) = 7{,}02 \\ f(1{,}99) = 6{,}98 \end{array}\right\} \text{ il semble que } \lim_{x \to 2} f(x) = 7$$

Effectuons un calcul de limite :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} \underset{\text{« } \frac{0}{0} \text{ »}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2x+3)}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} (2x+3) = 7$$

2.6.2 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 1}(4x^3 - 2x^2 + x - 1)$

b) $\lim\limits_{x \to -2}(x^2 - 5x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 3x^2}{x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 4}(-5)$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2 - 5}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x}$

g) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) + 1}{2 - \tan(x)}$

a) $ED(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 1}(4x^3 - 2x^2 + x - 1) = f(1) = 2$$