11. 01. 24

2.6.17 Calculer, si elles existent, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}$ pour les fonctions f suivantes :

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

- $4x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta < 0$, pas de zéro

$4x^2 - 4x + 3 > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|2x| \cdot \sqrt{1+\ldots}}{x\,(1+\ldots)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x} \cdot \sqrt{1+\ldots}}{\cancel{x}\,(1+\ldots)} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|2x| \cdot \sqrt{1+\ldots}}{x\,(1+\ldots)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2\cancel{x} \cdot \sqrt{1+\ldots}}{\cancel{x}\,(1+\ldots)} = -2$$

c) $f(x) = \underbrace{\sqrt{x^2+2x}} - \underbrace{\sqrt{x^2+4}}$ $ED(f) =]-\infty \,;\, -2] \cup [0 \,;\, +\infty[$

$$= \sqrt{x(x+2)} - \sqrt{x^2+4}$$

x		-2		0	
$x(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	
x^2+4	$+$

1 $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+4} \right) \underset{+\infty-(+\infty)}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x) - (x^2+4)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x\sqrt{1+\ldots} + x\sqrt{1+\ldots}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}(1+\ldots)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\ldots} + \sqrt{1+\ldots}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

2 $$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+4} \right) \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{-x\sqrt{1+\ldots} - x\sqrt{1+\ldots}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x}(1+\ldots)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\ldots} + \sqrt{1+\ldots}\right)} = \frac{2}{-2} = -1$$

c) $f(x) = \underbrace{\sqrt{x^2+2x}} - \underbrace{\sqrt{x^2+4}}$

$ED(f) = \left]-\infty\,;\,-2\right] \cup \left[0\,;\,+\infty\right[$

$= \sqrt{x(x+2)} - \sqrt{x^2+4}$

x		-2		0	
$x(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	
x^2+4	$+$

① $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+4} \right) \underset{+\infty-(+\infty)}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x)-(x^2+4)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x\sqrt{1+\ldots}+x\sqrt{1+\ldots}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}(1+\ldots)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\ldots}+\sqrt{1+\ldots}\right)} = \frac{2}{2} = 1$

② $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+4} \right) \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{-x\sqrt{1+\ldots}-x\sqrt{1+\ldots}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x}(1+\ldots)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\ldots}+\sqrt{1+\ldots}\right)} = \frac{2}{-2} = -1$

d) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3}$

① Signe de $4x^2 + 2x - 5$:

$$\Delta = 4 + 80 = 84 = 4 \cdot 21$$

zéros : $\dfrac{-2 \pm 2\sqrt{21}}{8} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}$ $\quad \alpha_1 = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{21})$ $\quad \alpha_2 = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{21})$

x		α_2		α_1	
$4x^2+2x-5$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$ED(f) = \left]-\infty; -3\right[\cup \left]-3; \alpha_2\right] \cup \left[\alpha_1; +\infty\right[$$

② $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3} \underset{\frac{+\infty-(+\infty)}{+\infty}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2(1+\dots)}}{x(1+\dots)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 2x\sqrt{1+\dots}}{x(1+\dots)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x}\left(1-\sqrt{1+\dots}\right)}{\cancel{x}(1+\dots)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\left(1-\sqrt{1+\dots}\right)}{1+\dots}$$

$$= 0$$

③ $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 2x\sqrt{1+\dots}}{x(1+\dots)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\dots}\right)}{\cancel{x}(1+\dots)}$$

$$= \frac{2 \cdot 2}{1} = 4$$

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$

① Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} (f(x)+g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

② limite d'un produit

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell \cdot \ell'$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	(signe) ∞
$\pm\infty$	$\pm\infty$	(signe) ∞
0	$\pm\infty$	Forme indéterminé

③ limite d'un quotient

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0	(signe) ∞
0	0	Forme indéterminé
ℓ	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	ℓ	(signe) ∞
$\pm\infty$	$\pm\infty$	Forme indéterminé

e) $f(x) = 2x - \cos(x)$ $ED(f) = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \dfrac{2x - \cos(x)}{x-1}$ $ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

g) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $ED(f) = \mathbb{R}$

h) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $ED(f) = \mathbb{R}^*$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \cdot 0$ FI $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot 0$ FI

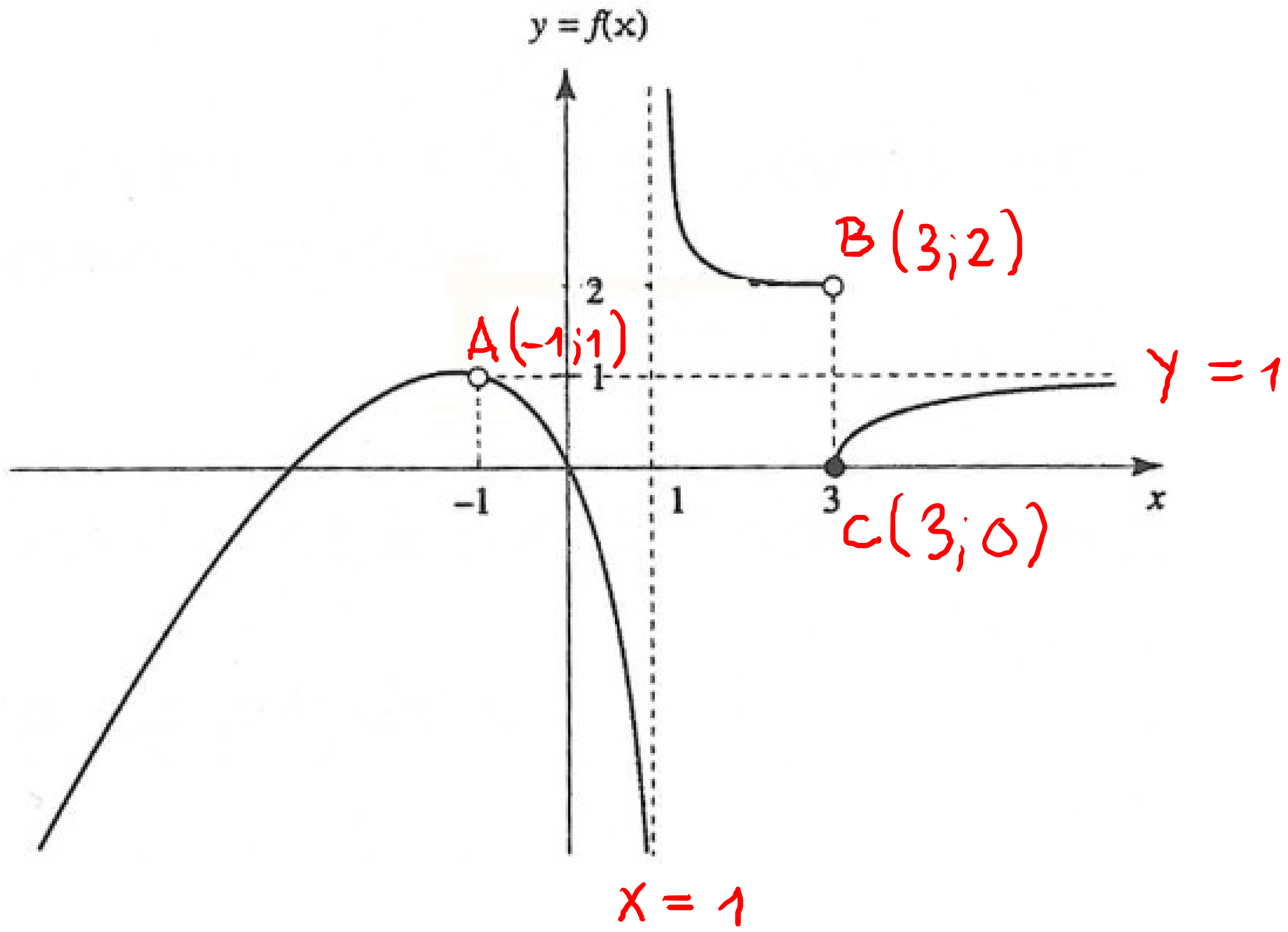
$x = \dfrac{1}{t} \iff t = \dfrac{1}{x}$

x	t
$\to \infty$	0

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \sin(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

2.7.1 Déterminer la nature des discontinuités de la fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous :



∘ n'appartient pas au graphique

• appartient au graphique

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

A est un point-trou

Point de discontinuité : $x = 3$

Définition

Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$.

f est continue en c si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-5x}{x^4-5x^3}$

e) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{, si } x \leq -1 \\ 4-2x & \text{, si } x > -1 \end{cases}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

a) ,b), c) , d) , f) continues sur ED(f)

a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \infty$$

b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\neq 1}{=}} \lim_{x \to -1} \frac{(x+3)\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \lim_{x \to -1} \frac{x+3}{x-1} = -1$ Pont-trou
- $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) \underset{\text{"}\frac{4}{0}\text{"}}{=} \infty$ asymptote verticale $x = 1$

e) $ED(f) = \mathbb{R}$

La fonction est-elle continue en $x = -1$?

- $f(-1) = -4$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -4$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 6$

$\displaystyle\lim_{x \to -1} f(-1)$ n'existe pas