13.09.23

Théorème fondamental

Soit $p \in \mathbb{C}[z]$ de degré n.

Alors p a n racines complexes

Exemples

1) $p = z^3 + 8z - 4 \in \mathbb{C}[z]$ a 3 racines complexes

2) $p = (3+2i)z^4 - 3z^2 + 3iz - i$ a 4 racines complexes

Dans $\mathbb{R}[x]$, c'est faux

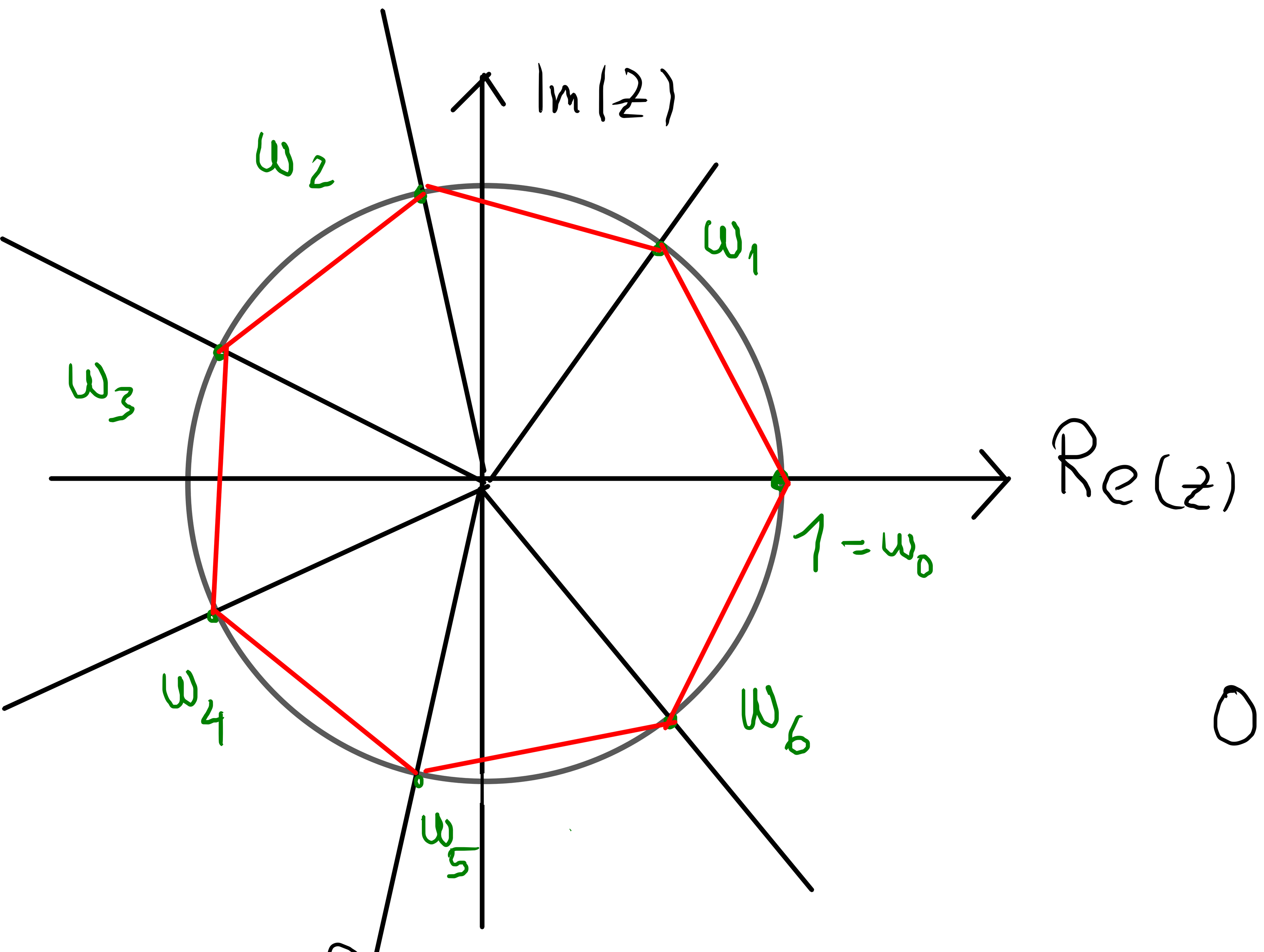
3) $p = x^4 + 1$ n'a aucune racine

1.2.9 Déterminer sous forme trigonométrique et représenter dans le plan complexe :

a) les racines septièmes de l'unité,

b) les solutions de l'équation $z^5 = -32$.

a) Il faut résoudre $z^7 - 1 = 0$



Soit ω tel que $\omega^7 = 1$

$\omega = [r, \theta]$ $\qquad r > 0,\ 0° \leq \theta < 360°$

$1 = [1 ; 0°]$

On a $\omega^7 = [r^7 ; 7\theta]$

$$\begin{cases} r^7 = 1 \\ 7\theta = 0° + K \cdot 360° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = K \cdot \dfrac{360°}{7} \end{cases} \qquad K \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta \cong K \cdot 51{,}43° \end{cases}$$

$\omega_0 = [1, 0°] = 1$, $\omega_1 = [1 ; 51{,}43°]$, $\omega_2 = [1 ; 102{,}86°]$

$\omega_3 = [1 ; 154{,}29°]$, $\omega_4 = [1 ; 205{,}72°]$, $\omega_5 = [1 ; 257{,}15°]$, $\omega_6 [1 ; 308{,}58°]$

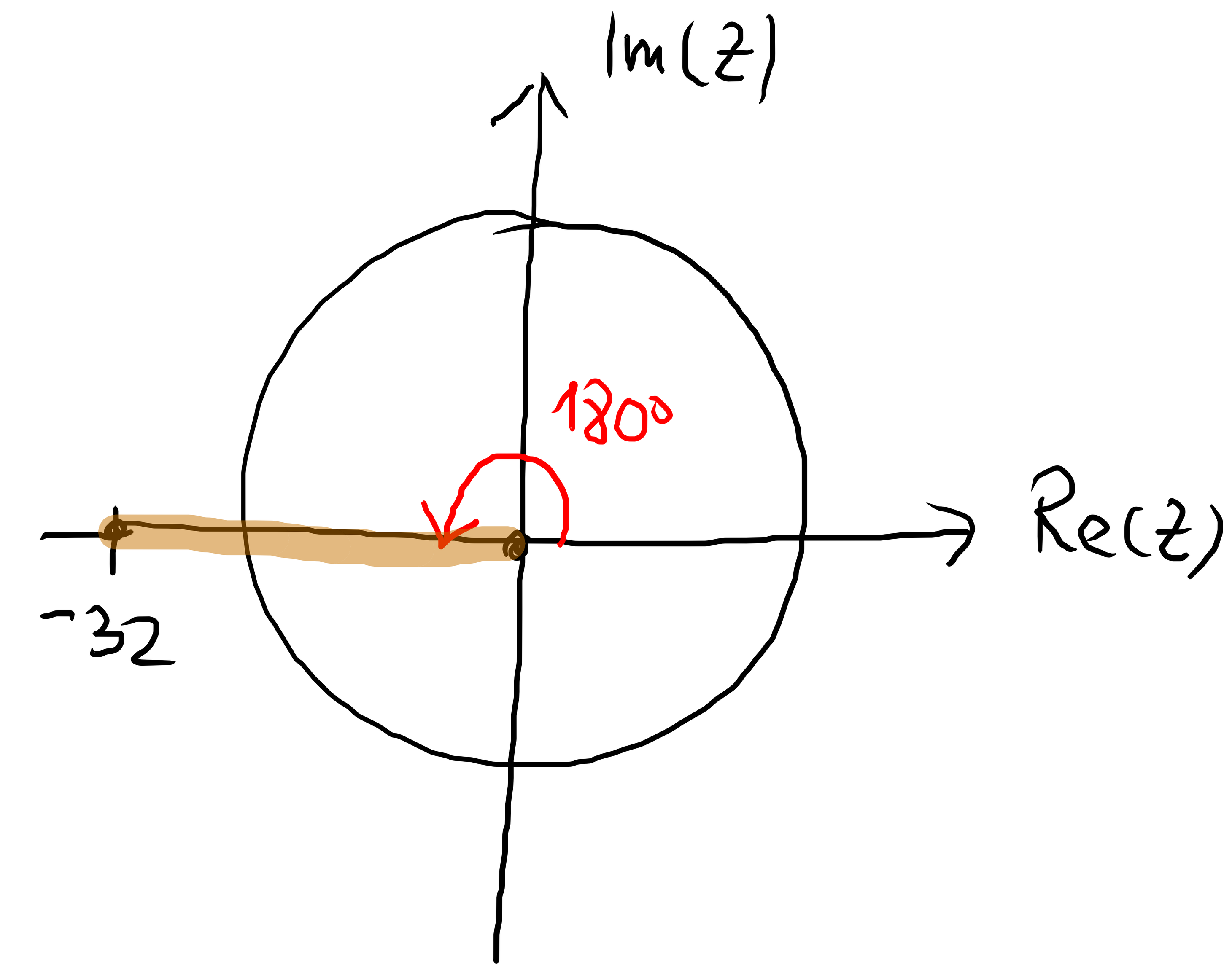
En reliant les racines 7ème de l'unité, on obtient un heptagone régulier

b) les solutions de l'équation $z^5 = -32$.

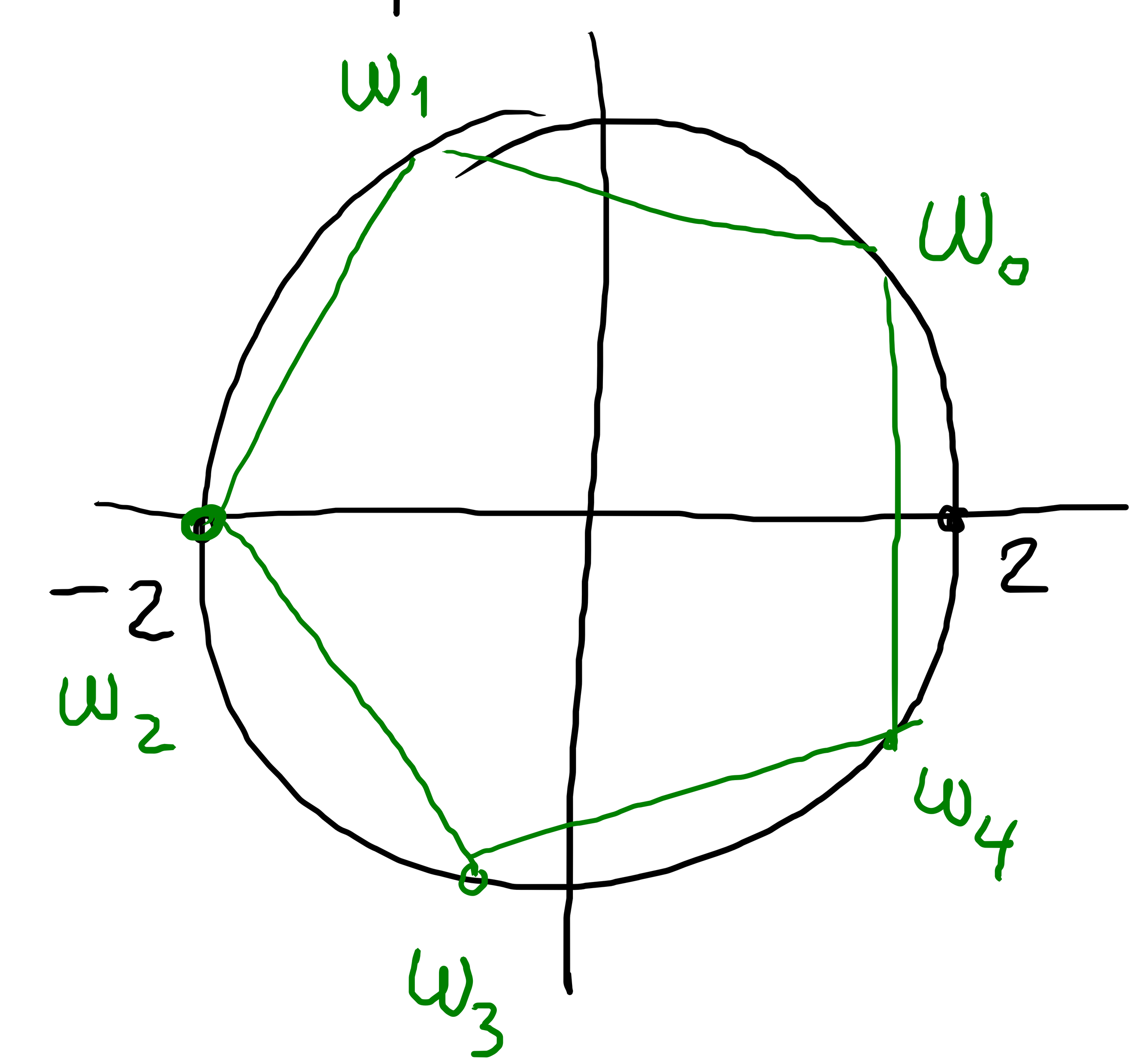
On a une solution $\omega = -2$, $(-2)^5 = -32$

Posons $\omega = [r, \theta]$, $\omega^5 = [r^5, 5\theta]$.

$-32 = [32, 180°]$



$$\begin{cases} r^5 = 32 \\ 5\theta = 180° + k360° \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r = 2 \\ \theta = 36° + k \cdot 72° \end{array}$$



$w_0 = [2; 36°] = 2\left(\cos(36°) + \sin(36°)\, i\right)$

$w_1 = [2; 108°]$

$w_2 = [2; 180°] = -2$

$w_3 = [2; 252°]$

$w_4 = [2; 324°]$

Les racines carrées

Dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \geq 0$. On appelle racine carrée de α, le nombre $r \geq 0$ tel que $r^2 = \alpha$. On note $r = \sqrt{\alpha}$.

Les racines carrées dans $\mathbb{C}$

On n'écrit pas $\sqrt{1+i}$!

Exemples

1) Calculons les racines carrées de 4.

$$z^2 = 4$$
$$z = \pm 2$$

2) Calculons les racines carrées de $3-4i$.

Soit $a+bi$ une racine de $3-4i$.

$$(a+bi)^2 = 3-4i$$
$$\underline{a^2-b^2} + \underline{2abi} = \underline{3} - \underline{4i}$$
$$\begin{cases} a^2-b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

On ajoute à ce système l'égalité $|(a+bi)^2| = |3-4i|$ $\quad \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

$$|a+bi|^2 = 5$$
$$a^2+b^2 = 5$$

Le système à résoudre

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = -4 \end{cases} \begin{array}{|c|c} b^2 & a^2 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \div 2 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2b^2 = 2 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \pm 1 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \ b = -1 \\ a = -2, \ b = 1 \end{cases}$$

Les racines carrées de $3-4i$ sont $2-i$ et $-2+i$.

$$(2-i)^2 = 4-4i+i^2 = 3-4i$$
$$(-2+i) = 4-4i+i^2 = 3-4i$$

b) Les racines carrées de i : $a+bi$

$$\begin{cases} a^2-b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} b^2 & a^2 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \\ & \\ \cdot 1 & \cdot 1 \end{array} \iff \begin{cases} 2a^2 = 1 \\ 2b^2 = 1 \\ ab = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 1/2 \\ b^2 = 1/2 \\ ab = 1/2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ ab = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les racines carrées : $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$