14.03.24

**2.10.7** Étudier la courbure des fonctions suivantes :

f) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

① Calculons la dérivée première.

$u = x^3 - 1 \quad ; \quad u' = 3x^2$

$v = x^3 + 1 \quad ; \quad v' = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3+1) - 3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^2(x^3+1-x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

② Calculons la dérivée seconde.

$u = 6x^2 \quad ; \quad u' = 12x$

$v = (x^3+1)^2 \quad ; \quad v' = 2(x^3+1)\cdot 3x^2 = 6x^2(x^3+1)$

$$f''(x) = \frac{12x(x^3+1)^2 - 6x^2 \cdot 6x^2(x^3+1)}{(x^3+1)^4} = \frac{12x(x^3+1)^2 - 36x^4(x^3+1)}{(x^3+1)^4}$$

$$= \frac{12x\cancel{(x^3+1)}\left[(x^3+1) - 3x^3\right]}{(x^3+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{12x(1-2x^3)}{(x^3+1)^3}$$

$ED(f'') = \mathbb{R} - \{-1\}$

zéro de $f''(x)$ : $\quad 12x\underbrace{(1-2x^3)} = 0$

$\downarrow$

$x = 0$

$2x^3 = 1$

$x^3 = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cong 0{,}79$

Tableau de la courbure :

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $\Vert$ | $\cap$ | pi | $\cup$ | pi | $\cap$ |

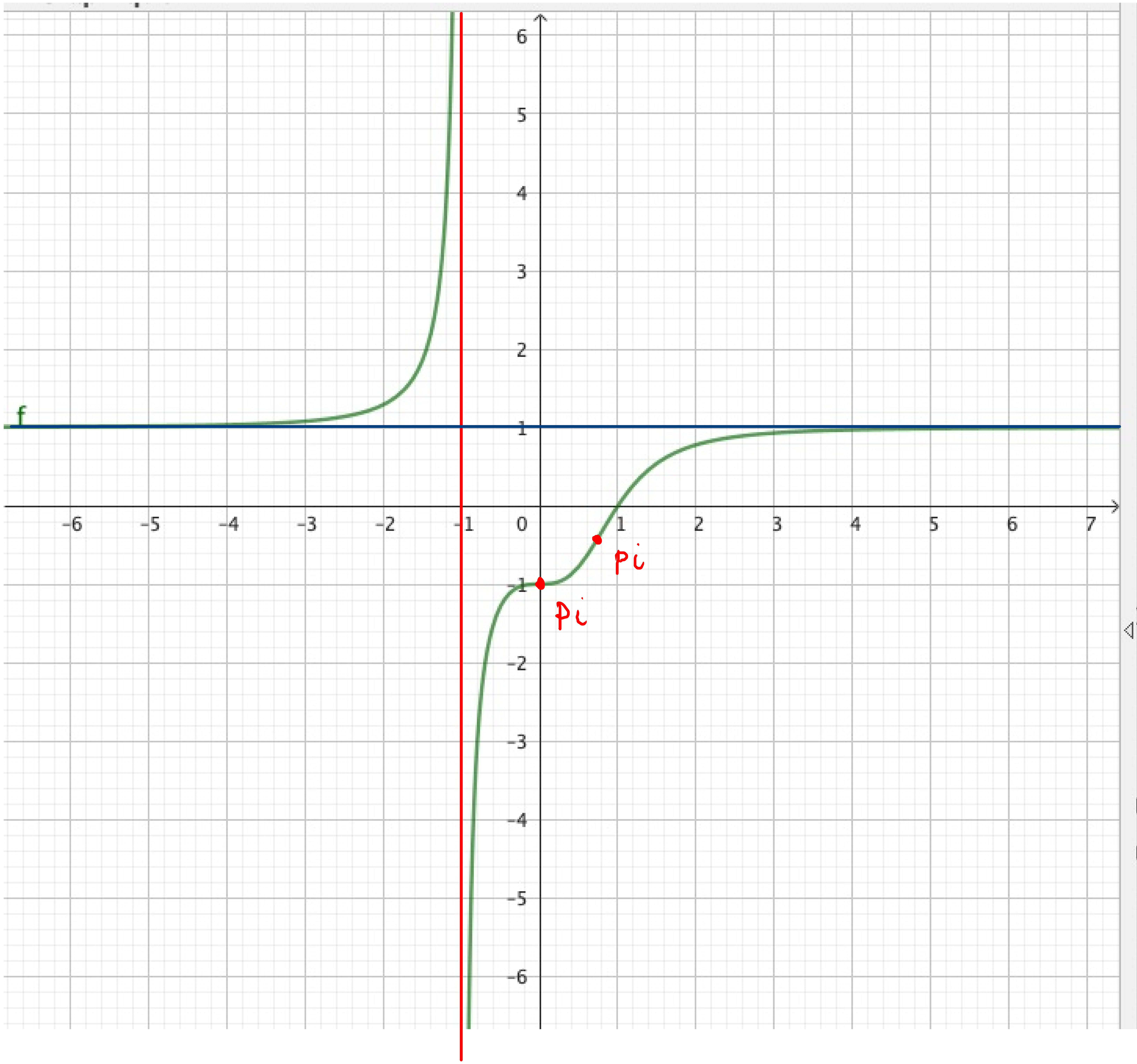
pi $(0 ; -1)$

pi $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} ; \frac{-1}{3}\right)$

$f(0) = \frac{1}{-1} = -1 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3}$

2.10.7

f)



**2.10.8** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^3 - 3x^2$ en son point d'inflexion.

Posons $y = f(x)$

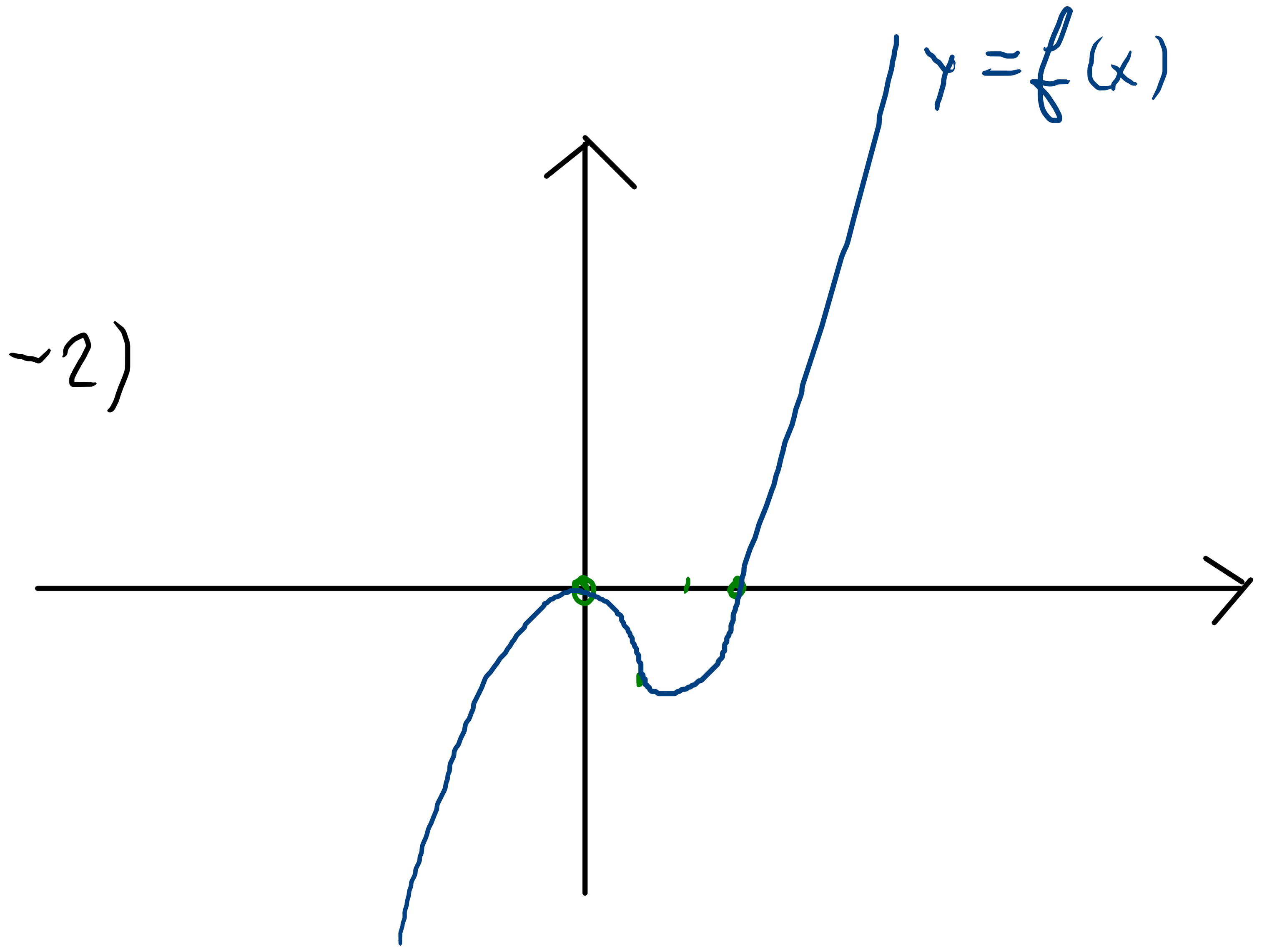
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(x-1) \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6(x-1)$$

<u>Tableau de la courbure</u>

| $x$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | $\boxed{\text{pi}}$ | $\smile$ |

pi $A(1; -2)$




Tangente en $A$ : $y = \underbrace{f'(1)}_{-3}\, x + h$

$$y = -3x + h$$

Par $A(1;-2)$ : $-2 = -3 + h \quad \Rightarrow \quad h = 1$

$$\boxed{y = -3x + 1}$$

**2.10.10** Étudier les fonctions suivantes :

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

① Recherchons $ED(f)$ :

zéros du dénominateur : $x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2 \qquad x = -2$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2;\ 2\}$

② Parité, périodicité

2.1) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x^3}{x^2-4} = -\dfrac{x^3}{x^2-4} = -f(x)$

$y = f(x)$ est impaire

2.2) Pas de périodicité

③ Signe de la fonction :

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ $0$ | $-$ | ‖ | $+$ |

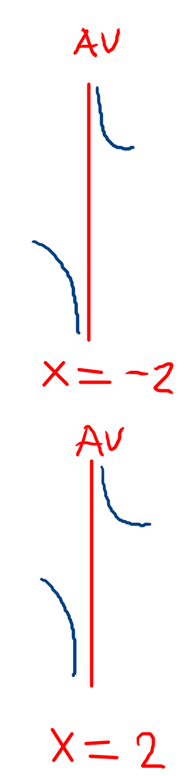
④ Déterminons les asymptotes de $f(x)$.

AV : $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3}{x^2-4} = $ " $\dfrac{-8}{0}$ " $= \infty$ $\quad \boxed{x = -2 \text{ AV}}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3}{x^2-4} = $ " $\dfrac{8}{0}$ " $= \infty$ $\quad \boxed{x = 2 \text{ AV}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty \\ \lim f(x) = +\infty \end{array} \right.$




AH/AO : Par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & x^2 - 4 \\ \hline - \quad x^3 \qquad\quad -4x & x \\ \hline \text{reste } (4x) & \end{array}$$

$y = x + \underbrace{\dfrac{4x}{x^2-4}}_{S(x)}$

$\boxed{AO : \quad y = x}$

Position entre AO et la courbe

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ ‖ | $+$ |
| Position | dessous | ‖ | dessus | coupe | dessous ‖ | dessus |

## ⑤ Croissance de $f(x)$

$u = x^3 \quad ; \quad u' = 3x^2$

$v = x^2 - 4 \quad ; \quad v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2\left[3(x^2-4) - 2x^2\right]}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{x^2(3x^2-12-2x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$ED(f') = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ ; zéros de $f'(x)$ : $0, \underbrace{\pm\sqrt{12}}_{\pm 2\sqrt{3}}$

| | | $z_i$ | | $z_p$ | | $z_p$ | | $z_p$ | | $z_i$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-2\sqrt{3}$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $2\sqrt{3}$ | |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\boxed{\text{max}}$ | ↘ | ‖ | ↘ | | | ‖ | ↘ | $\boxed{\text{min}}$ | ↗ |

max $(-2\sqrt{3} ; -3\sqrt{3})$

min $(2\sqrt{3} ; 3\sqrt{3})$

$$f(-2\sqrt{3}) = \frac{(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2 - 4} = \frac{-8 \cdot 3\sqrt{3}}{8} = -3\sqrt{3}$$

$$f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$$

## 6 Courbure

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$u = x^4 - 12x^2 \quad ; \quad u' = 4x^3 - 24x = 4x(x^2-6)$$

$$v = (x^2-4)^2 \quad ; \quad v' = 2(x^2-4)\cdot 2x = 4x(x^2-4)$$

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-6)(x^2-4)^2 - x^2(x^2-12)\cdot 4x(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{4x\cancel{(x^2-4)}\left[(x^2-6)(x^2-4) - x^2(x^2-12)\right]}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{4x\left[x^4-10x^2+24-x^4+12x^2\right]}{(x^2-4)^3} = \frac{4x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

| $x$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | $\Vert$ | $\smile$ | $\boxed{\text{pi}}$ | $\frown$ | $\Vert$ | $\smile$ |

pi $(0;0)$

pi à tangente horizontale