14.12.23

2.6.2 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 1}(4x^3 - 2x^2 + x - 1)$

b) $\lim_{x\to -2}(x^2 - 5x)$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x + 3x^2}{x + 1}$

d) $\lim_{x\to 4}(-5)$

e) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2 - 5}$

f) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x}$

g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

h) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x) + 1}{2 - \tan(x)}$

f) $$\lim_{x\to 1}\underbrace{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x}}_{f(x)} = \frac{4}{3} = f(1)$$

e) $$\lim_{x\to 3}\underbrace{\sqrt{x^2 - 5}}_{g(x)} = \sqrt{9-5} = 2 = g(3)$$

2.6.3 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{2x-6}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{100x^2}{x}$

a) $$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{2x-6} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x \to 3} \frac{\overset{1}{\cancel{x-3}}}{2\underset{1}{\cancel{(x-3)}}} = \frac{1}{2}$$

cette limite est indéterminée. Par calcul, levons l'indétermination.

Indéterminations les plus courantes

$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \infty \cdot 0$ $\quad +\infty - \infty$ $\quad 0^0$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{100x^2}{x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{100 \cdot \cancel{x^2}^{\,x}}{\underset{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x \to 0} 100x = 0$$

c) $$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{(x+4)\cancel{(x-2)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

d) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\underset{1}{\cancel{x-1}}} = 2$$

e) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15} = \dfrac{25+10-15}{25+40+15} = \dfrac{20}{80} = \dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-16} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to4}\dfrac{x\cancel{(x-4)}}{(x+4)\cancel{(x-4)}} = \lim\limits_{x\to4}\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x^3-4x^2-7x+10} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2-3x-10)} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x^2-3x-10} = \dfrac{1}{-12}$

Il faut factoriser $p = x^3-4x^2-7x+10$.

On sait que $p(1)=0$, effectuons la division de p par $x-1$:

	1	-4	-7	10
1		1	-3	-10
	1	-3	-10	0

reste

$p = (x-1)(x^2-3x-10)$

h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 3x - 4} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(2x^2 - x - 1)}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \dfrac{0}{5} = 0$

Divisons $2x^3 - 3x^2 + 1$ par $x - 1$:

	2	−3	0	1
1		2	−1	−1
	2	−1	−1	0

$(2x^2 - x - 1)(x-1) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

2.6.4 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}} = \lim_{x\to16}\frac{\cancel{(x-16)}(\sqrt{x}+4)}{\cancel{x-16}} = 8$

"1 et est défini au voisinage de 16

ou $\lim_{x\to16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to16} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-4)}(\sqrt{x}+4)}{\cancel{\sqrt{x}-4}} = 8$

défini au voisinage de 0

c) $\lim_{h\to0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{h\to0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h}\cdot\boxed{\frac{4+\sqrt{16+h}}{4+\sqrt{16+h}}}$

$= \lim_{h\to0} \frac{16-(16+h)}{h(4+\sqrt{16+h})} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{h\to0}\frac{\overset{-1}{\cancel{-h}}}{\cancel{h}(4+\sqrt{16+h})}$

$= \frac{-1}{8}$

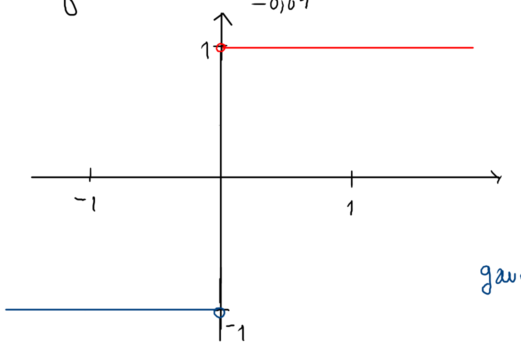
2.6.5 Calculer, si elles existent, la limite à gauche, la limite à droite et la limite des fonctions suivantes pour x tendant vers x_0 :

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{|x|}$ $\quad x_0 = 0$

a) $ED = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$, 0 est un pôle ou une valeur interdite

$f(0{,}01) = \dfrac{0{,}01}{0{,}01} = 1$

$f(-0{,}01) = \dfrac{0{,}01}{-0{,}01} = -1$



$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ existe ?

gauche $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{|x|}{x} = -1$

droite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{|x|}{x} = 1$

$\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas

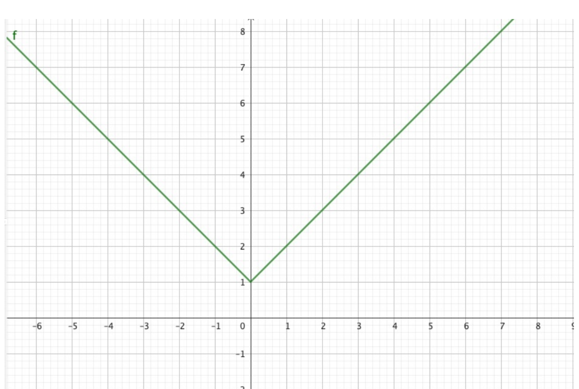
b) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{|x|}$

$ED(f) = \mathbb{R}^*$

$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$ $\qquad \boxed{f(-4) = \dfrac{16 - (-4)}{-(-4)}}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 + |x|}{|x|} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 - x}{-x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x(x-1)}{-x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x-1}{-1} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2 + |x|}{|x|} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2 + x}{x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x+1}{1} = 1$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + |x|}{|x|} = 1$$