15.05.24

3.3.8 Calculer la longueur de la corde commune aux cercles $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 10\,x + 10\,y$ et $\gamma_2 : x^2 + y^2 + 6\,x + 2\,y = 40$.

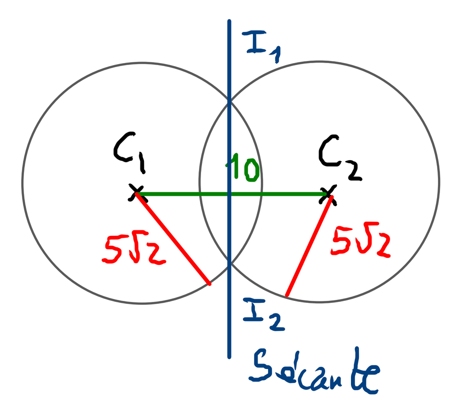
$(\gamma_1) : x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 0 + 25 + 25$

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 50 \qquad C_1(5;5) \;, \; r_1 = 5\sqrt{2}$

$(\gamma_2) : x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 40 + 9 + 1$

$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 50 \qquad C_2(-3;-1) \;, \; r_2 = 5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{C_1C_2}\| = 10$



$C_1C_2 = 10 < r_1 + r_2 = 10\sqrt{2}$

γ_1 et γ_2 sécants

$\underline{x - y + 8 = 0}$

$\underline{3x + 4y - 6 = 0}$

$$\begin{cases} (\gamma_1): & x^2 + y^2 = 10\,x + 10\,y \\ (\gamma_2): & x^2 + y^2 + 6\,x + 2\,y = 40. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\gamma_1): & x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 & \cdot(-1) \\ (\gamma_2): & x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0 & \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S): & 16x + 12y - 40 = 0 \\ (\gamma_1): & x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 \end{cases}$$ est la sécante

$$\begin{cases} (S): & 4x + 3y - 10 = 0 \quad (1) \\ (\gamma_1): & x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow (1) \; \boxed{y = \frac{-4x+10}{3}}$$

Substituons (1) dans (2) :

$$x^2 + \left(\frac{-4x+10}{3}\right)^2 - 10x - 10 \cdot \frac{-4x+10}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{16x^2 - 80x + 100}{9} - 10x - \frac{-40x + 100}{3} = 0 \qquad \Big| \cdot 9$$

$$9x^2 + 16x^2 - 80x + 100 - 90x + 120x - 300 = 0$$

$$25x^2 - 50x - 200 = 0 \qquad \Big| \div 25$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

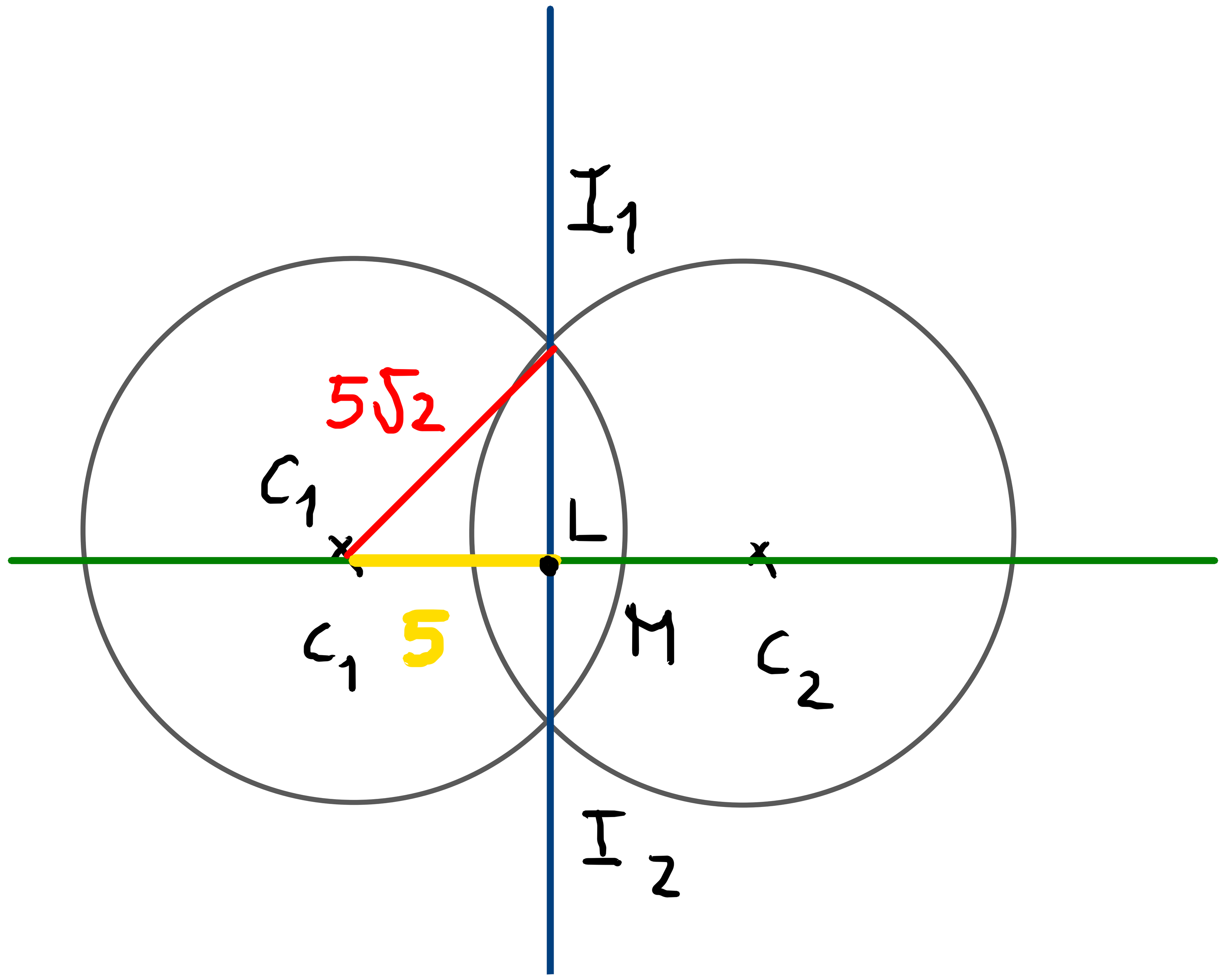
$$(x-4)(x+2) = 0$$

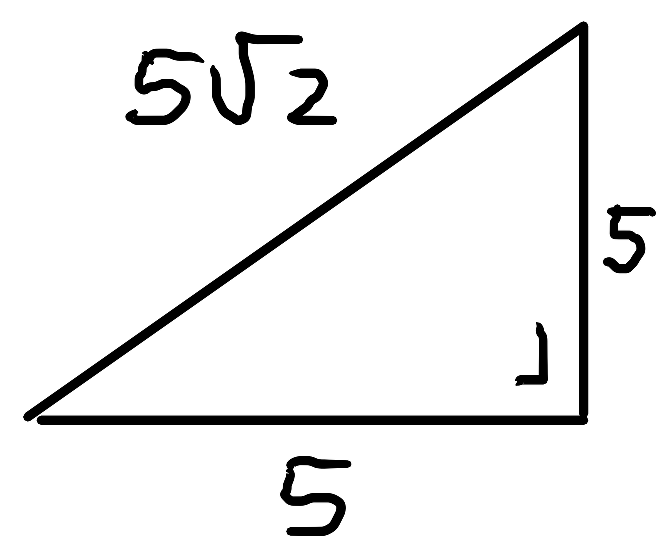
(i) $x = 4 \;, \; y = \frac{-16+10}{3} = -2 \qquad \Rightarrow I_1(4;-2)$

(ii) $x = -2 \;, \; y = \frac{8+10}{3} = 6 \qquad \Rightarrow I_2(-2;6)$

$\overrightarrow{I_1I_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow I_1I_2 = 10$

Deuxième méthode





$$\sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = \sqrt{50 - 25} = \sqrt{25}$$

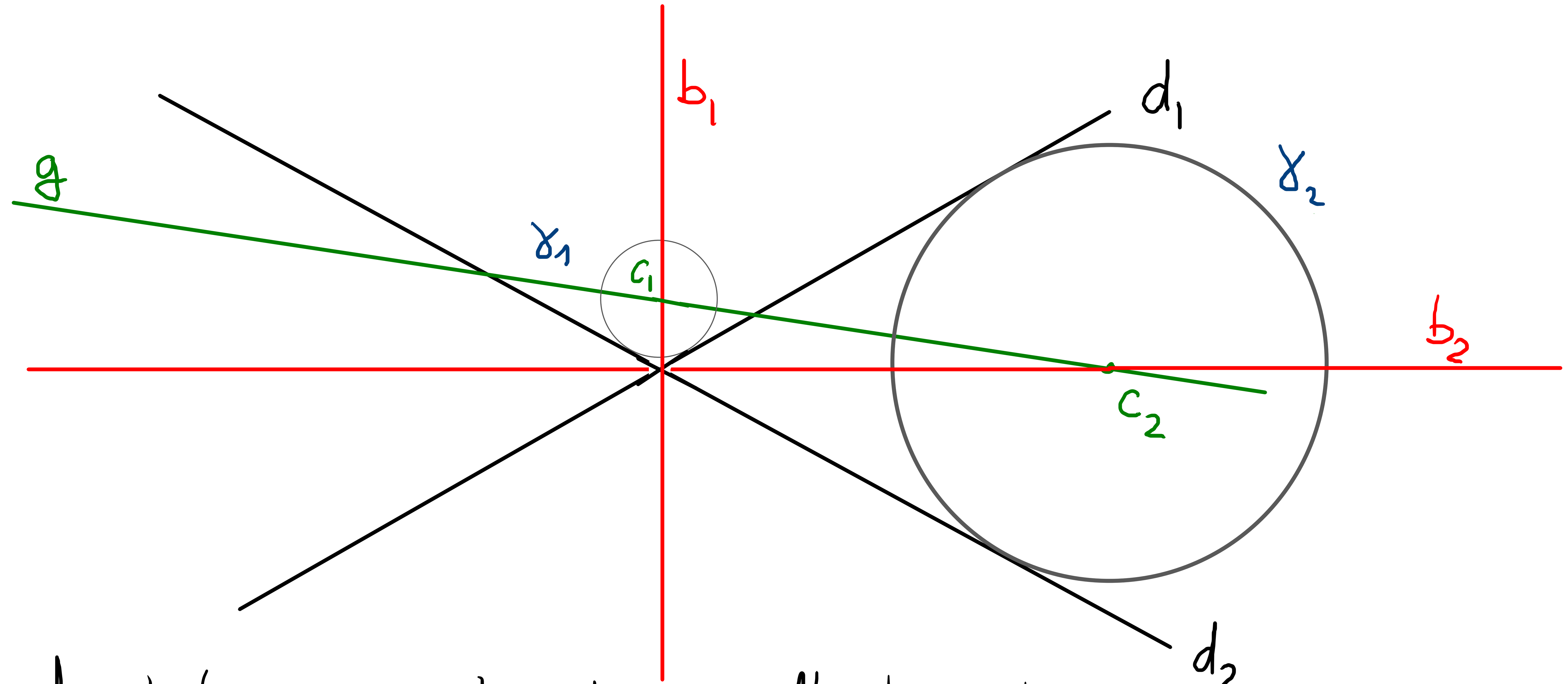
$$I_1M = 5 \Rightarrow I_1I_2 = 10$$

3.3.9 Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4\,x - 5\,y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites $2\,x = 3\,y + 10$ et $2\,y = 3\,x + 5$.

(d_1) : $2x - 3y - 10 = 0$

(d_2) : $3x - 2y + 5 = 0$

(g) : $4x - 5y - 3 = 0$



Les centres des cercles cherchés se situent à l'intersection des bissectrices de la croix $d_1 d_2$ et de g.

Formulaire Burrer

Équations des bissectrices b et b' :

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

1) <u>bissectrices :</u>

$$\frac{2x - 3y - 10}{\sqrt{13}} = \pm \frac{3x - 2y + 5}{\sqrt{13}} \Rightarrow 2x - 3y - 10 = \pm (3x - 2y + 5)$$

"+" : $2x - 3y - 10 = 3x - 2y + 5$

$x + y + 15 = 0$

(b_1) : $x + y + 15 = 0$

"−" : $2x - 3y - 10 = -3x + 2y - 5$

$5x - 5y - 5 = 0$

(b_2) : $x - y - 1 = 0$

$(b_1) : x + y + 15 = 0$

$(b_2) : x - y - 1 = 0$

2) Le centre des cercles :

$$\begin{cases} x + y = -15 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

$C_1(-8 ; -7)$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

$C_2(2 ; 1)$

3) Rayon

$$\delta(C_1 ; d_1) = \frac{|-16 + 21 - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$\delta(C_2 , d_2) = \frac{|4 - 3 - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

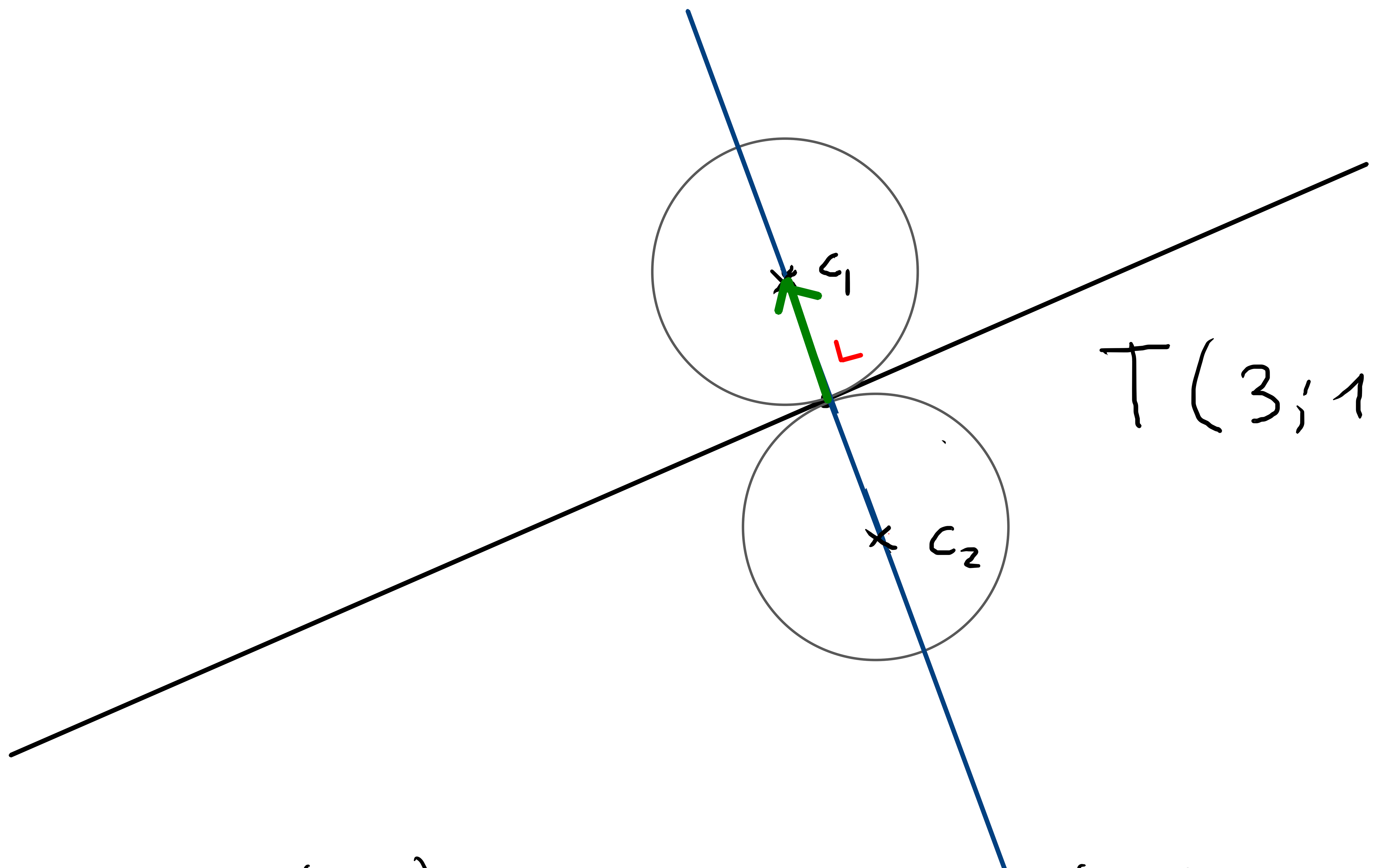
4) Eq des cercles

$(\gamma_1) : (x + 8)^2 + (y + 7)^2 = \frac{25}{13}$

$(\gamma_2) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{81}{13}$

3.3.11 Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2\,y = 1$ au point $T(3;?)$.

$(d): \quad x - 2y - 1 = 0 \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp d \qquad \|\vec{n}\| = \sqrt{5}$



$T(3;1)$

$\overrightarrow{TC_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TC_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\gamma_1): \ (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$

$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\gamma_2): \ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$