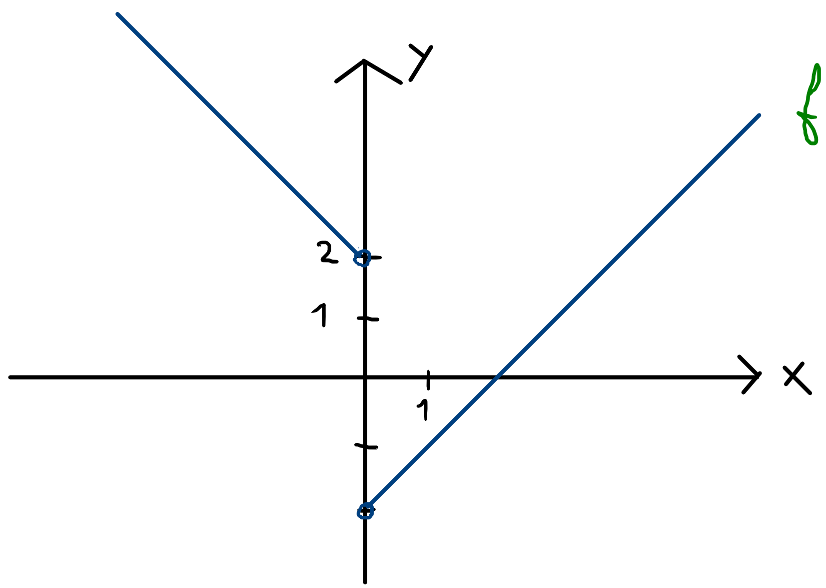
15, 12, 23

2.6.5 Calculer, si elles existent, la limite à gauche, la limite à droite et la limite des fonctions suivantes pour x tendant vers x_0 :

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{|x|} \qquad x_0 = 0$



$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x<0 \\ -x+2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$ED(f) = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{|x|} \overset{\text{Ind}}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad ?$$

1) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 - 2x}{|x|} \overset{\text{Ind}}{=}_{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\overset{1}{\cancel{x}}(x-2)}{\underset{-1}{\cancel{-x}}} = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2 - 2x}{|x|} \overset{\text{Ind}}{=}_{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\cancel{x}(x-2)}{\underset{1}{\cancel{x}}} = -2$$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas

d) $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2-3x+2}$ $\quad x_0 = 2$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{1 ; 2\}$

zéros du dénominateur : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

Que se passe-t-il lorsque $x \to 1$?

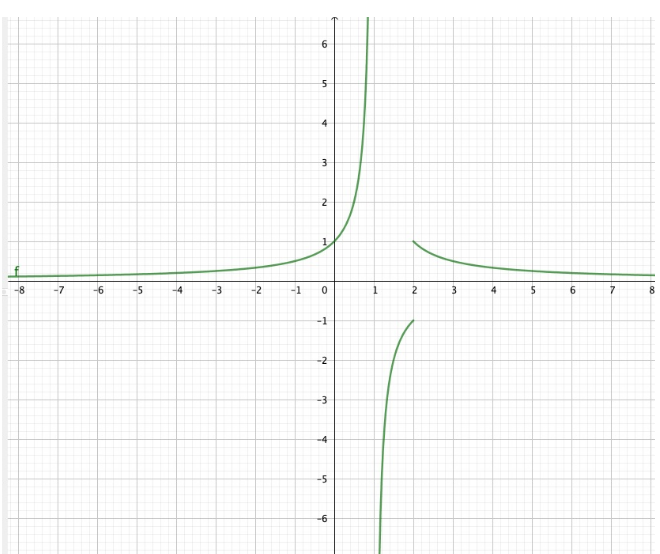
$$\lim_{x \to 1} \frac{|x-2|}{x^2 - 3x + 2} \underset{\text{"}\frac{1}{0}\text{"}}{=} \infty$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{(x-1)(x-2)} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \ ?$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{|x-2|}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-x+2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\overset{-1}{\cancel{-(x-2)}}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{|x-2|}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\overset{1}{\cancel{x-2}}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} = 1$$

Donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas.



Une limite classique

Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Rappel : on utilise les radians !

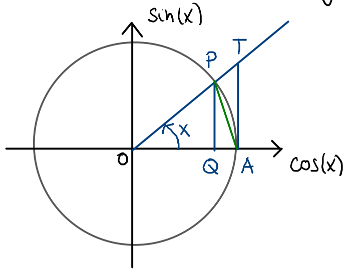
Il semble que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, merci ma TI.

On constate que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{Ind}}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ est une forme indéterminée.

Distinguons deux cas : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.

① $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sin(x)}{x}$

Utilisons le cercle trigonométrique et comparons des aires



Exprimons l'aire de certains triangles :

Aire ΔOPA : $\frac{1}{2} OA \cdot QP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin(x) = A_1$

Aire ΔOAT : $\frac{1}{2} OA \cdot AT = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) = A_2$

Exprimons l'aire du secteur OAP :

Aire secteur : $\frac{1}{2} \times OA^2 = \frac{1}{2} x = A_s$

On a : $A_1 \leq A_s \leq A_2$, donc $\frac{1}{2} \sin(x) \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan(x)$ $\quad | \cdot 2$

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

$$\frac{1}{\sin(x)} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\tan(x)} \quad | \cdot \sin(x), \ \sin(x) > 0$$

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$$

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

On a : $\underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1}_{1} \geq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sin(x)}{x} \geq \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \cos(x)}_{1}$

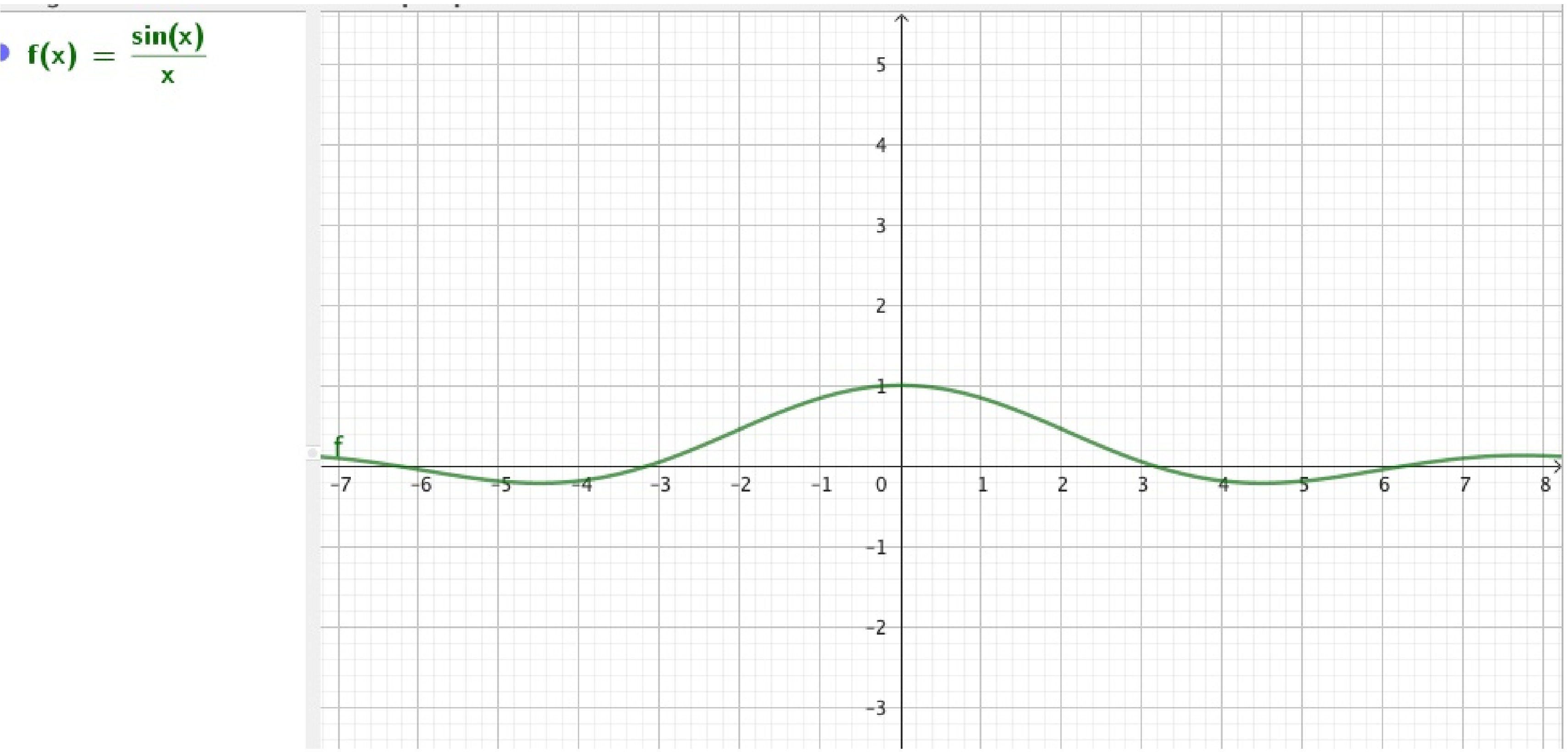
(*) $1 \geq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sin(x)}{x} \geq 1$

Par le théorème des deux gendarmes :

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Pour $x < 0$, par (*) $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$