16.11.23

2.5.2 Calculer les quatre premiers termes des suites :

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - 2}{3} \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

a) $a_1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

Suites définies de façons récurrentes

d) $a_1 = 1$ $\qquad a_n = 1, \text{ si } n \geq 1$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1$

$a_4 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1$

c) $a_1 = 2$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{41}{20} = \frac{41}{40}$

$a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{41}{40} + \frac{40}{41}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{41^2 + 40^2}{1640} = \frac{3281}{3280}$

2.5.3 Trouver les termes généraux des suites :

a) 4 7 10 13 16 ...

b) 2 8 18 32 50 ...

c) $1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \ldots$

d) $-\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{6} \quad \ldots$

e) -3 9 -27 81 -243 ...

f) $1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[5]{5} \quad \ldots$

a) $x_n = 3n + 1$, $n \geq 1$

b) $x_n = 2 \cdot n^2$, $n \geq 1$

c) $x_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

d) $x_n = \frac{-3 + n}{n}$, $n \geq 2$ ou $x_n = \frac{n-2}{n+1}$, $n \geq 1$

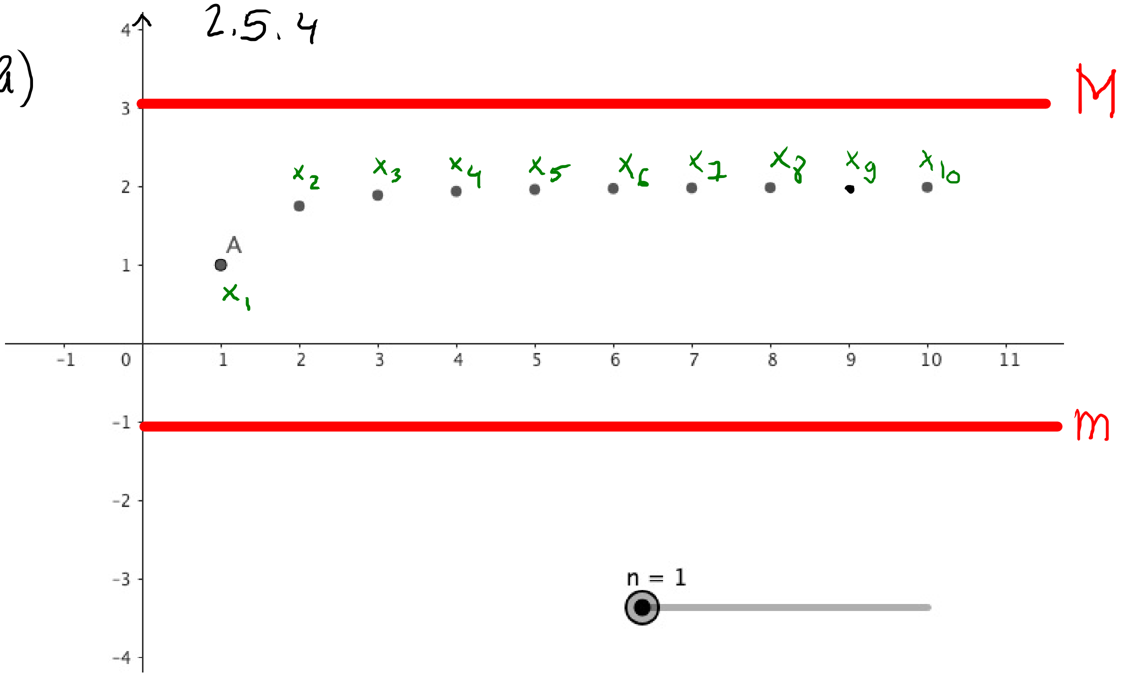
e) $x_n = (-3)^n$, $n \geq 1$

f) $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$

Suites majorées, minorées et bornées

2.5.4

a)



$-1 < x_n < 3$

M et m ne sont pas uniques

Une suite (x_n) est majorée, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M$.

M est appelé un majorant de la suite.

Une suite (x_n) est minorée, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \geq m$

Une suite (x_n) est bornée si elle est minorée et majorée.

Théorème

Une suite est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n| \leq M$.

Suite croissante

Une suite (X_n) est croissante si pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$, on a $X_p \leq X_q$.

Suite décroissante

Une suite (X_n) est décroissante si pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$, on a $X_p \geq X_q$.

Résumé

croissante $X_{n+1} \geq X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

décroissante $X_{n+1} \leq X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2.5.4 Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$ b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$

$$a_1 = 2 - \frac{1}{1^2} = 1$$

$$a_2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

$$\left(1, \frac{7}{4}, \frac{17}{9}, \frac{31}{16}, \ldots\right)$$

- $1 \leq a_n < 2$

  1 est un minorant et 2 est un majorant

  l'ensemble des minorants $]-\infty ; 1]$

  l'ensemble des majorants $[2 ; +\infty[$, $a_n = 2 - \frac{1}{n^2} < 2$

  (a_n) est borneé

- Croissante, en effet :

$$a_{n+1} - a_n = \left(2 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$2 - \frac{1}{(n+1)^2} - 2 + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2 \cdot (n+1)^2} =$$

$$\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2 (n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} > 0$$

Cette suite est strictement croissante.