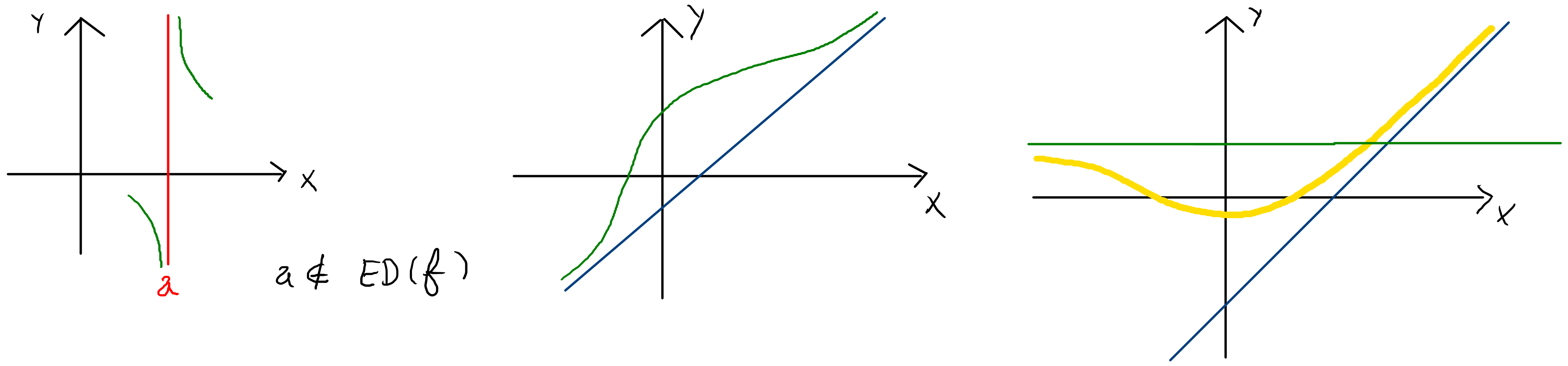
17.01.24

Asymptotes

Nous avons vu le comportement de certaines fonctions pour des valeurs où la fonction n'est pas définie et lorsque $x \to \infty$,



$a \notin ED(f)$

Définition

De façon intuitive, une asymptote est une droite dont le graphe de f se rapproche au voisinage d'un point d'abcisse a ou vers ∞

Définition

Soit f une fonction et $a \notin ED(f)$.

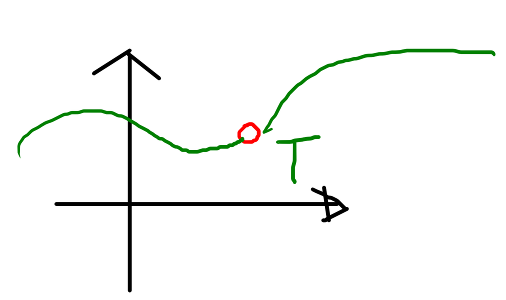
1) Si $\lim\limits_{x \to a^{<}} f(x) = \infty$, on dit que la droite $x = a$ est une asymptote verticale à gauche de la courbe $y = f(x)$.

2) Si $\lim\limits_{x \to a^{>}} f(x) = \infty$, on dit que la droite $x = a$ est une asymptote verticale à droite de la courbe $y = f(x)$.

3) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, on dit que la droite $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $y = f(x)$.

Remarque

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, on a un point trou de coordonnées $T(a, b)$



On note AVG, AVD et AV.

2.8.1 Pour les fonctions suivantes, on demande : l'ensemble de définition, les asymptotes (avec étude de position) et le tracé du graphe.

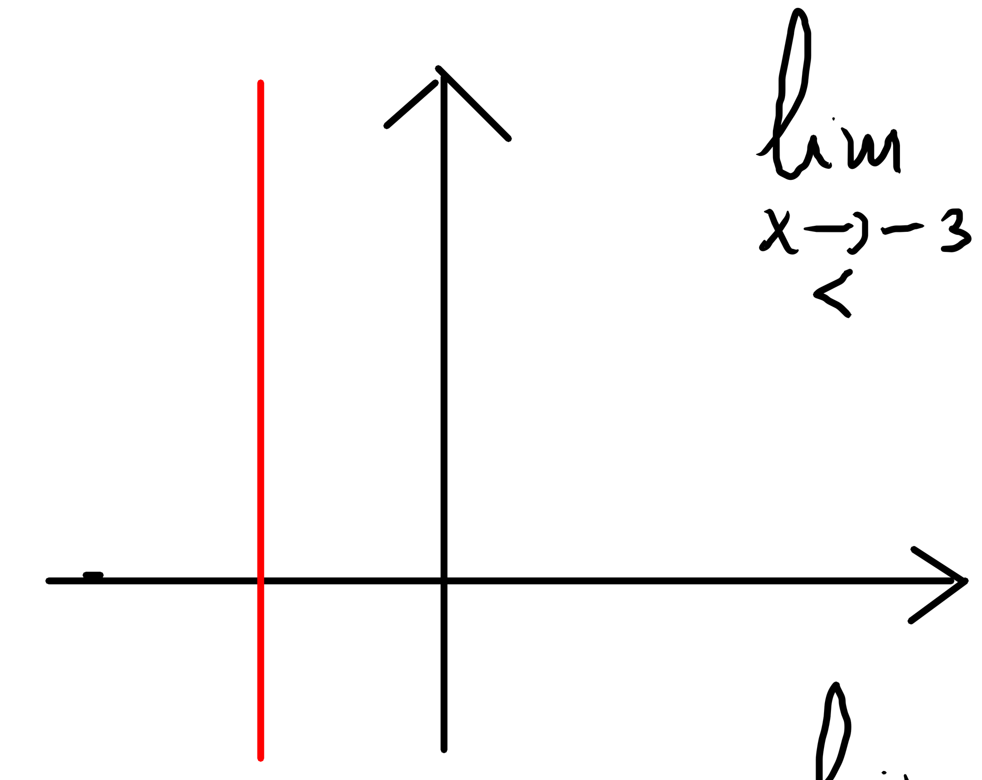
a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{-3 ; 1\}$$

Recherchons les AV :

- $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}^{1}}{(x+3)\cancel{(x-1)}_{1}} = \infty \quad$ " $\dfrac{-1}{0}$ " $\Rightarrow$ AV : $x = -3$



$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty \quad$ " $\dfrac{-1}{0_-}$ "

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty \quad$ " $\dfrac{-1}{0_+}$ "

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ Point - trou $\left(1 ; \dfrac{3}{4}\right)$

Pour déterminer la position entre l'AV et la courbe, on utilise le tableau des signes de la fonction

x		-3		-2		1	
$f(x)$		$\|\|$		0		$\|\|$	

-2 , 1

-3 , 1

2.8.1 Pour les fonctions suivantes, on demande : l'ensemble de définition, les asymptotes (avec étude de position) et le tracé du graphe.

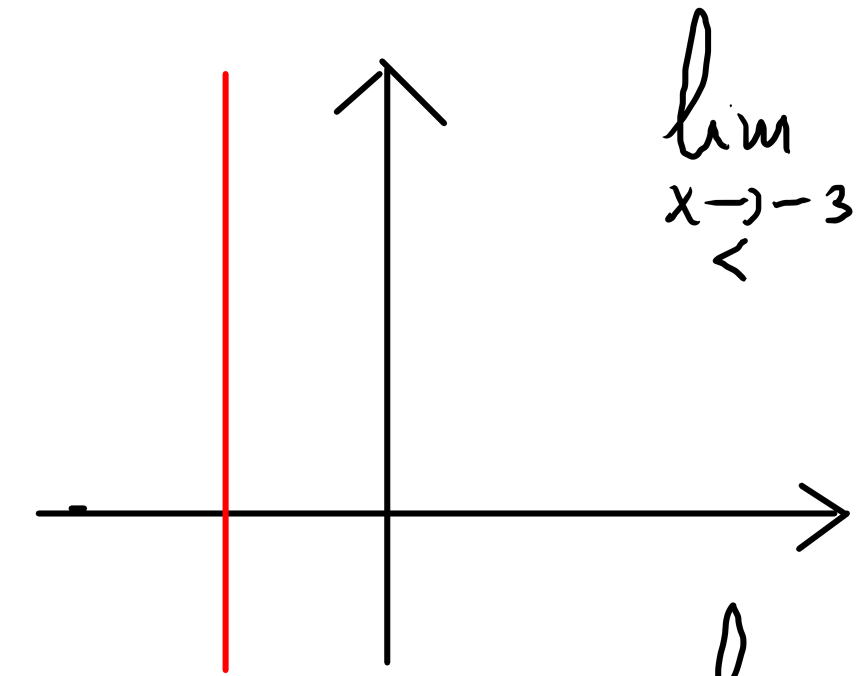
a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{-3\,;\,1\}$$

Recherchons les AV :

- $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}^{1}}{(x+3)\cancel{(x-1)}_{1}} = \infty$ " $\frac{-1}{0}$ " $\Rightarrow$ AV : $x = -3$



$\displaystyle\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty$ " $\frac{-1}{0_-}$ "

$\displaystyle\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty$ " $\frac{-1}{0_+}$ "

- $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}} = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ Point - trou $\left(1;\ \frac{3}{4}\right)$

Pour déterminer la position entre l'AV et la courbe, on utilise le tableau des signes de la fonction

x		-3		-2		1	
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$

$-2\ ,\ 1$

$-3\ ,\ 1$

$\displaystyle\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty$ " $\frac{-1}{0_-}$ "

$\displaystyle\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty$ " $\frac{-1}{0_+}$ "

Définition

1) La droite $y = h$ est une asymptote horizontale à gauche si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = h \qquad (AHG)$$

2) La droite $y = h$ est une asymptote horizontale à droite si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = h \qquad (AHD)$$

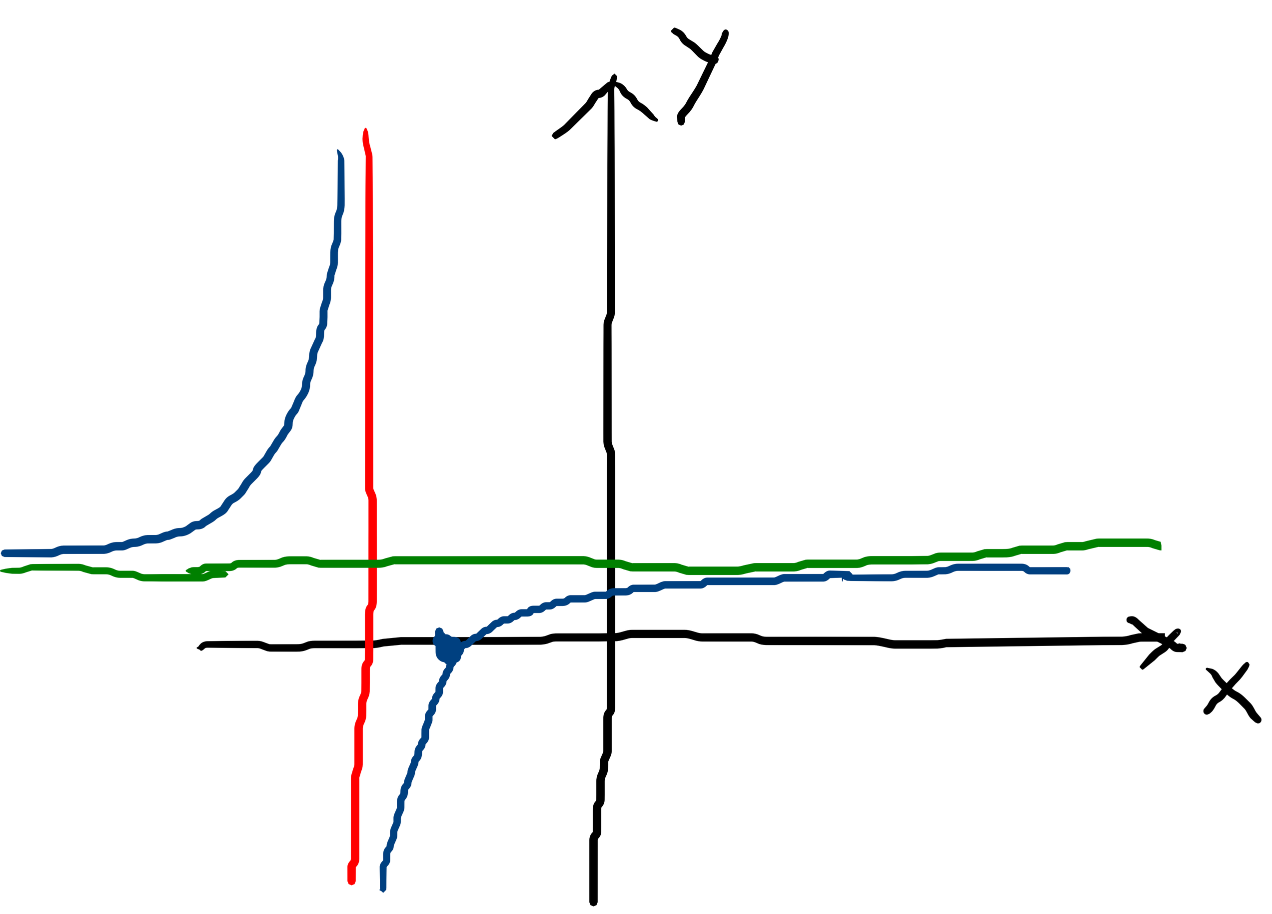
3) La droite $y = h$ est un asymptote horizontale si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = h \qquad (AH)$$

2.8.2

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \text{ est un AH}$$

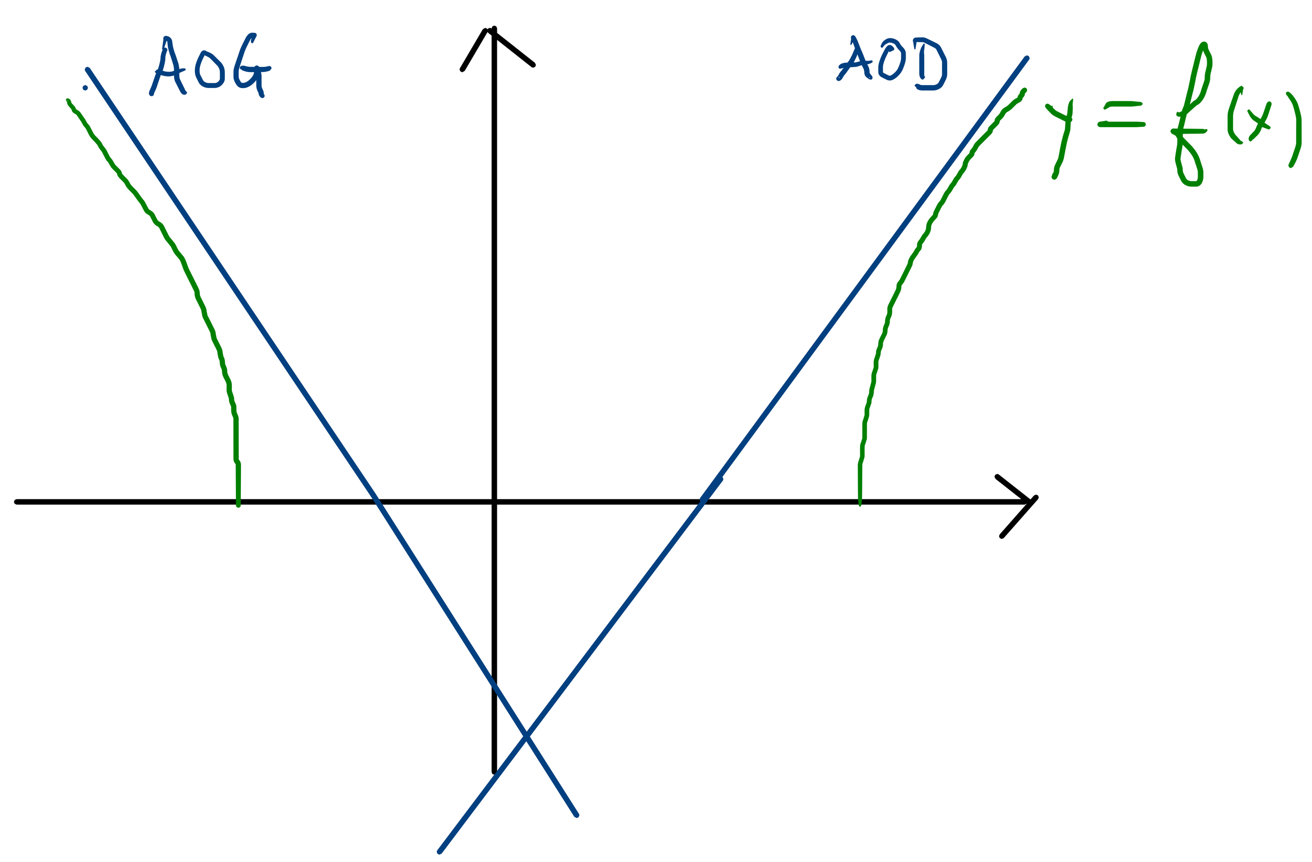


Définition

1) La droite d'équation $y = mx + h$ est une asymptote oblique à gauche si $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (mx+h)\right) = 0$ (AOG)

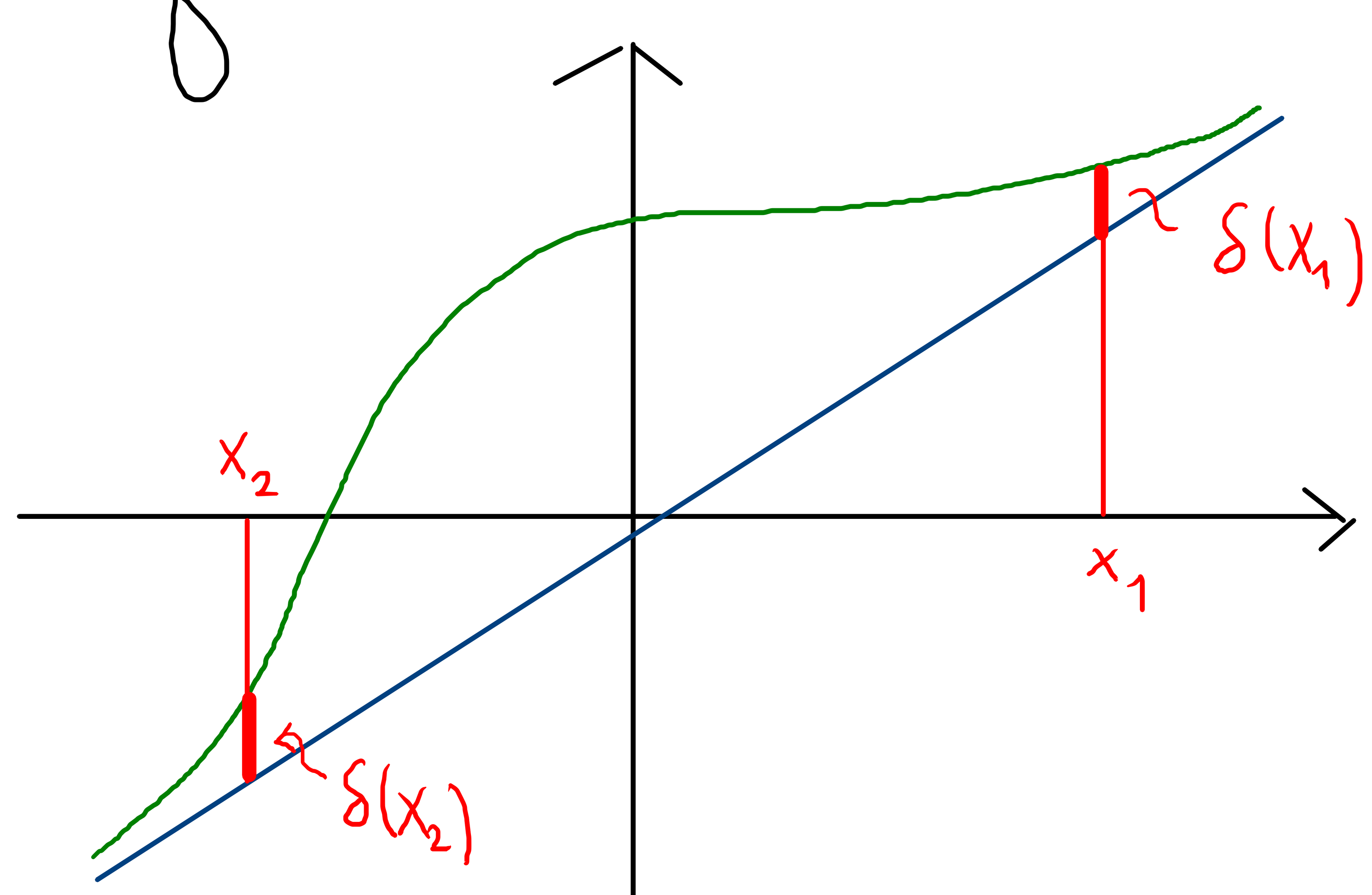
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx+h)\right) = 0$, $y = mx + h$ est une AOD.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - (mx+h)\right) = 0$, $y = mx+h$ est une AO.



Si $x \to \infty$, on peut écrire dans le cas d'une AO

$$f(x) = mx + h + \delta(x)$$



b) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

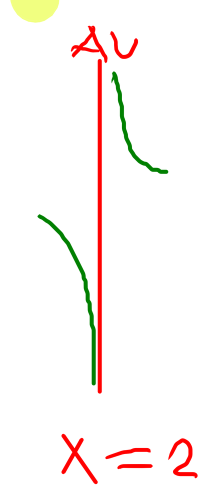
2)

x		2	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$

⚠ $x^2+x+1=0$

$\Delta < 0 \Rightarrow x^2+x+1>0$

3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty \Rightarrow x=2$ est une AV
"$\frac{7}{0}$"



$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Dans le cas des fonctions rationnelles on détermine l'AO par division euclidienne.

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + x + 1 & x-2 \\ \hline
- & x^2 - 2x & x + 3 \\ \hline
 & 3x + 1 & \\
- & 3x - 6 & \\ \hline
 & \text{reste } 7 &
\end{array}$$

$$f(x) = x + 3 + \underbrace{\frac{7}{x-2}}_{\delta(x)}$$

Donc $y = x+3$ est une AO