2.8.1 Pour les fonctions suivantes, on demande : l'ensemble de définition, les asymptotes (avec étude de position) et le tracé du graphe.

f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4} = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{(x-2)(x+2)}$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$

2) Signe de $f(x)$.

zéros du numérateur : $\underbrace{x^3 - 3x^2 + 2}_{} = 0$

$p = x^3 - 3x^2 + 2$

$p(1) = 0 \Rightarrow (x-1) / p$

Par Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

$p = (x-1)\underbrace{(x^2 - 2x - 2)}_{}$

$\Delta = (-2)^2 - 4(-2) = 4 + 8 = 12$

$x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{2} = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \cong 2{,}7$

$x_2 = 1 - \sqrt{3} \cong -0{,}7$

$f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2 - 2x - 2)}{(x-2)(x+2)}$

x		-2		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$	
$f(x)$	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$

~~1~~, ~~-0,7~~, 2,7

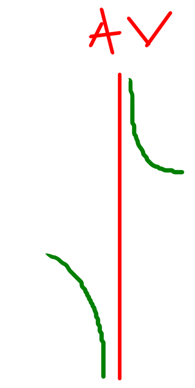
~~-2~~, 2

3) AV : $x = -2$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$ « $\frac{-18}{0}$ »

$x = -2$ est une AV

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty \end{cases}$

AV



$x = -2$

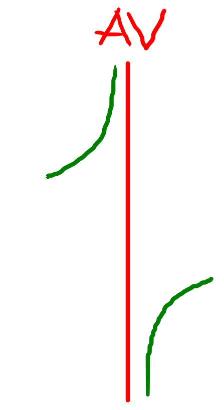
$x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$ « $\frac{-2}{0}$ »

$x = 2$ est une AV

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = -\infty \end{cases}$

☺

AV



$x = 2$

Je sais qu'on a une AO (différence des degrés num/den)

AO : par division

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & \dots & +2 & x^2-4 \\
\hline
-\ \ x^3 & & -4x & & x \\
\hline
 & -3x^2 & +4x & +2 & -3 \\
 & -\ \ -3x^2 & & +12 & \\
\hline
\end{array}
$$

reste : $4x - 10$

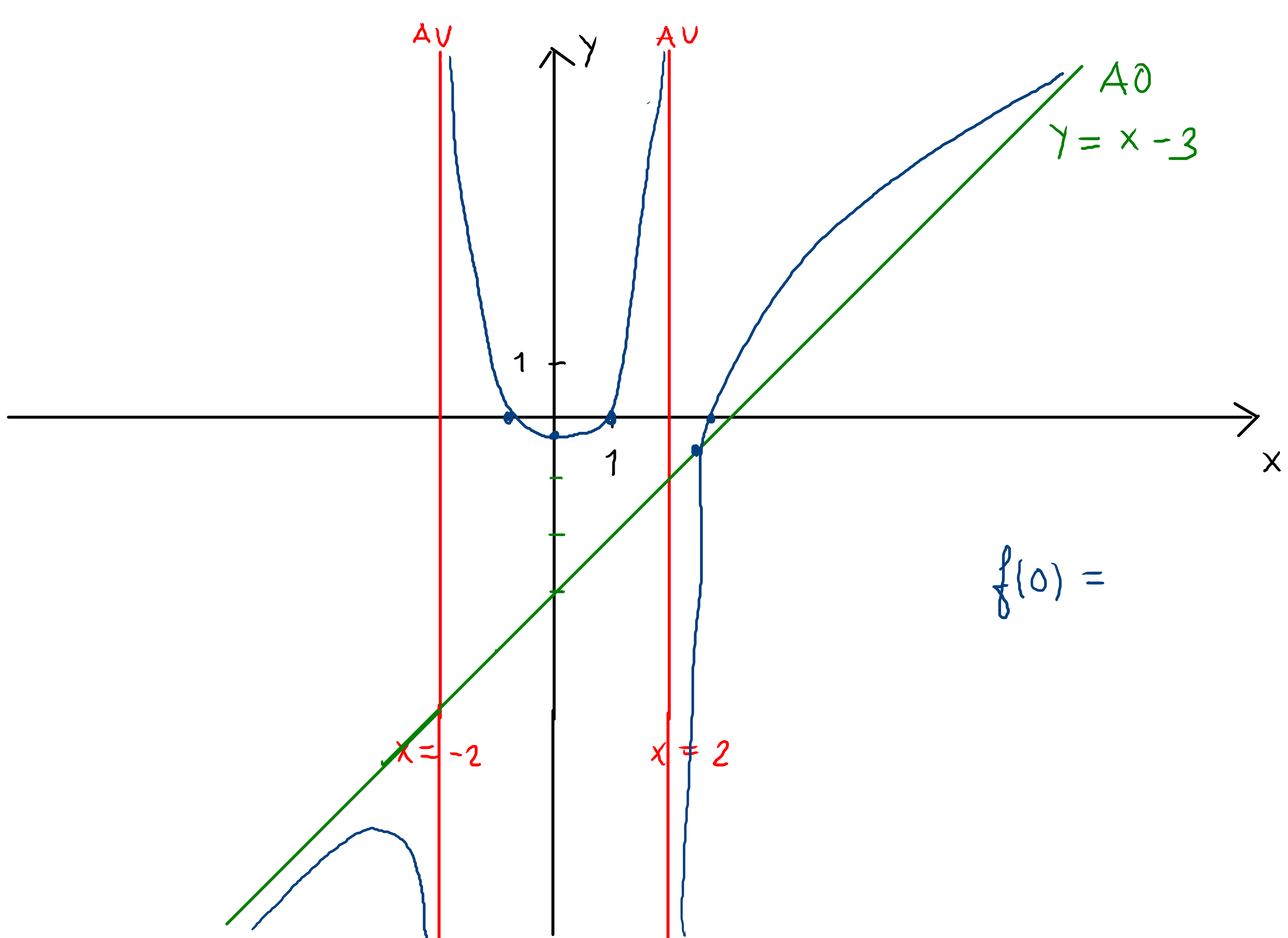
$$f(x) = x - 3 + \frac{4x-10}{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad AO : y = x - 3$$

Posons $S(x) = \dfrac{4x-10}{x^2-4} = \dfrac{4(x-\frac{5}{2})}{(x-2)(x+2)}$

$S(x)$ représente la position de la courbe par rapport à son AO.

Déterminons son signe :

x		-2		2		$5/2$	
$S(x)$	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$
Position	dessous	||	dessus	||	dessous	intersection	dessus



2.8.2 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes des fonctions f données par :

a) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ b) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

a) 1) ED(f) : $\frac{x}{x+1} \geqslant 0$

x		-1		0	
$\frac{x}{x+1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$$\text{ED}(f) = \left]-\infty\,;\,-1\right[\cup \left[0\,;\,+\infty\right[$$

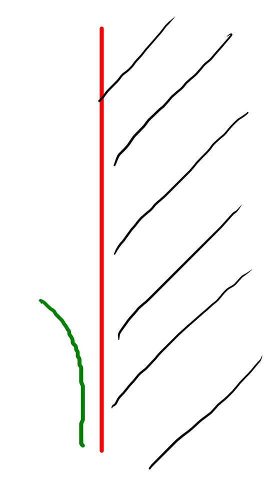
2) Signe de $f(x)$

x		-1		0	
$f(x)$	$-$	$\Vert$		0	$+$

3) AVG

$$\lim_{x \to -1^-} x\sqrt{\frac{x}{x+1}} = -\infty \quad \Rightarrow \text{AVG} : x = -1$$

$$\text{"}-1 \cdot \sqrt{\frac{-1}{0_-}}\text{"}$$
$$\Downarrow$$
$$-1 \cdot \sqrt{+\infty} = -\infty$$



4) AH/AO :

$$\lim_{x \to \infty} x\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \infty \cdot 1 = \infty \quad \Rightarrow \text{pas d'AH}$$

Généralisation (Recherche des AH/AO)

La droite $y = mx + h$ est une AO à droite de $y = f(x)$ si et seulement si

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right)$$

démo épisode suivant

$$m = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} \left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}} - x\right) \overset{\text{FI}}{=} \text{"}+\infty - \infty\text{"}$$

suite le 19.01.24