2, 10, 15 20.03.24

$$f(r) = 15\pi r^2 + \frac{3240\pi}{r} \quad ; r > 0$$

$$= \frac{15\pi r^3 + 3240\pi}{r} = 15\pi \ \frac{r^3 + 216}{r}$$

Déterminons les extrema.

$u = r^3 + 216 \quad ; \quad u' = 3r^2$

$v = r \quad ; \quad v' = 1$

$$f'(r) = 15\pi \ \frac{3r^2 \cdot r - (r^3 + 216) \cdot 1}{r^2} = 15\pi \ \frac{2r^3 - 216}{r^2} = 30\pi \ \frac{r^3 - 108}{r^2}$$

zéro : $r^3 = 108$

$r^3 = 4 \cdot 27 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{4 \cdot 27} = 3\sqrt[3]{4} \approx 4,76 \ [cm]$

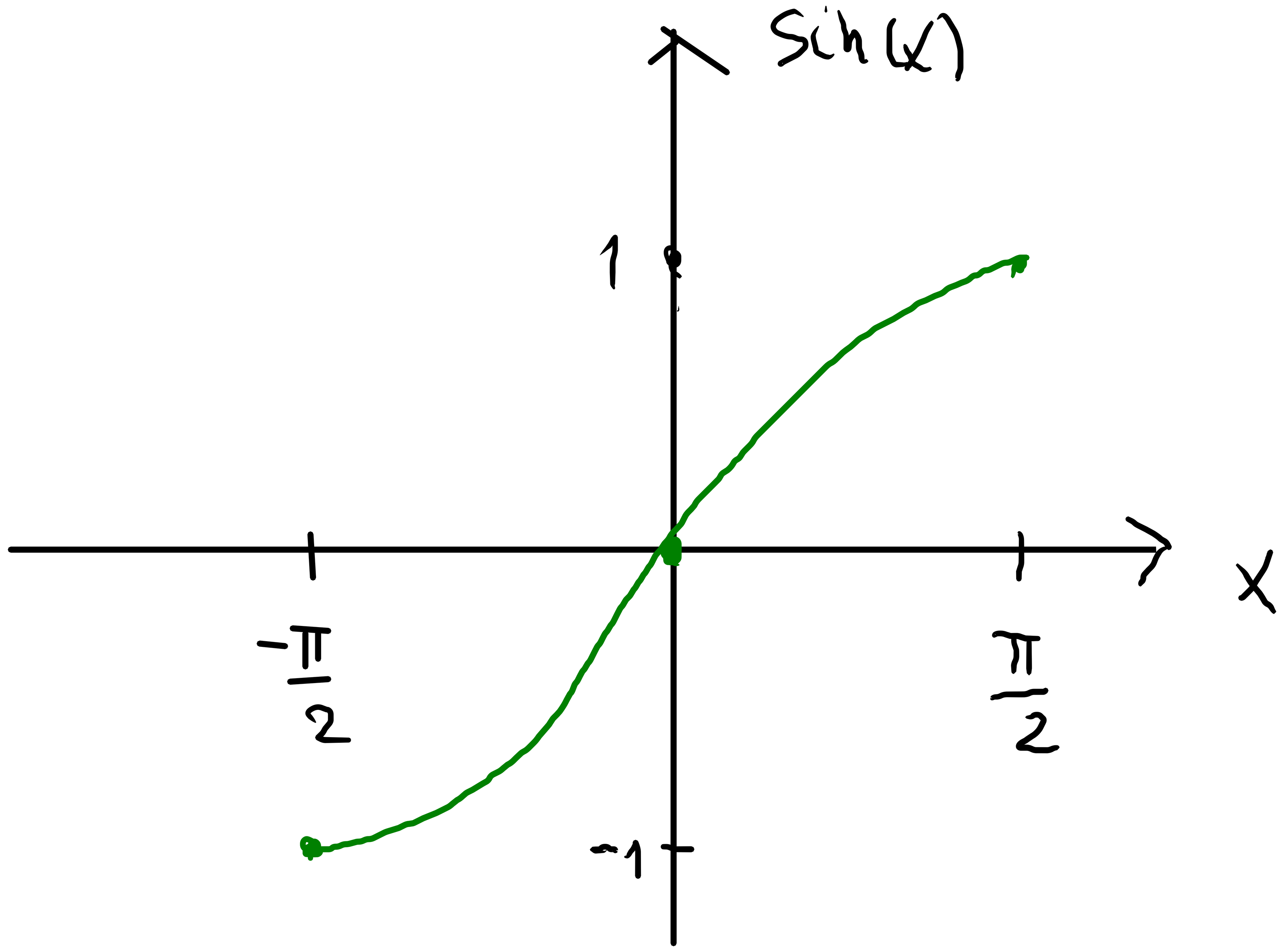
r	0		4,76	
$f'(r)$	‖	$-$	0	$+$
$f(r)$	‖	↘	$\boxed{\text{min}}$	↗

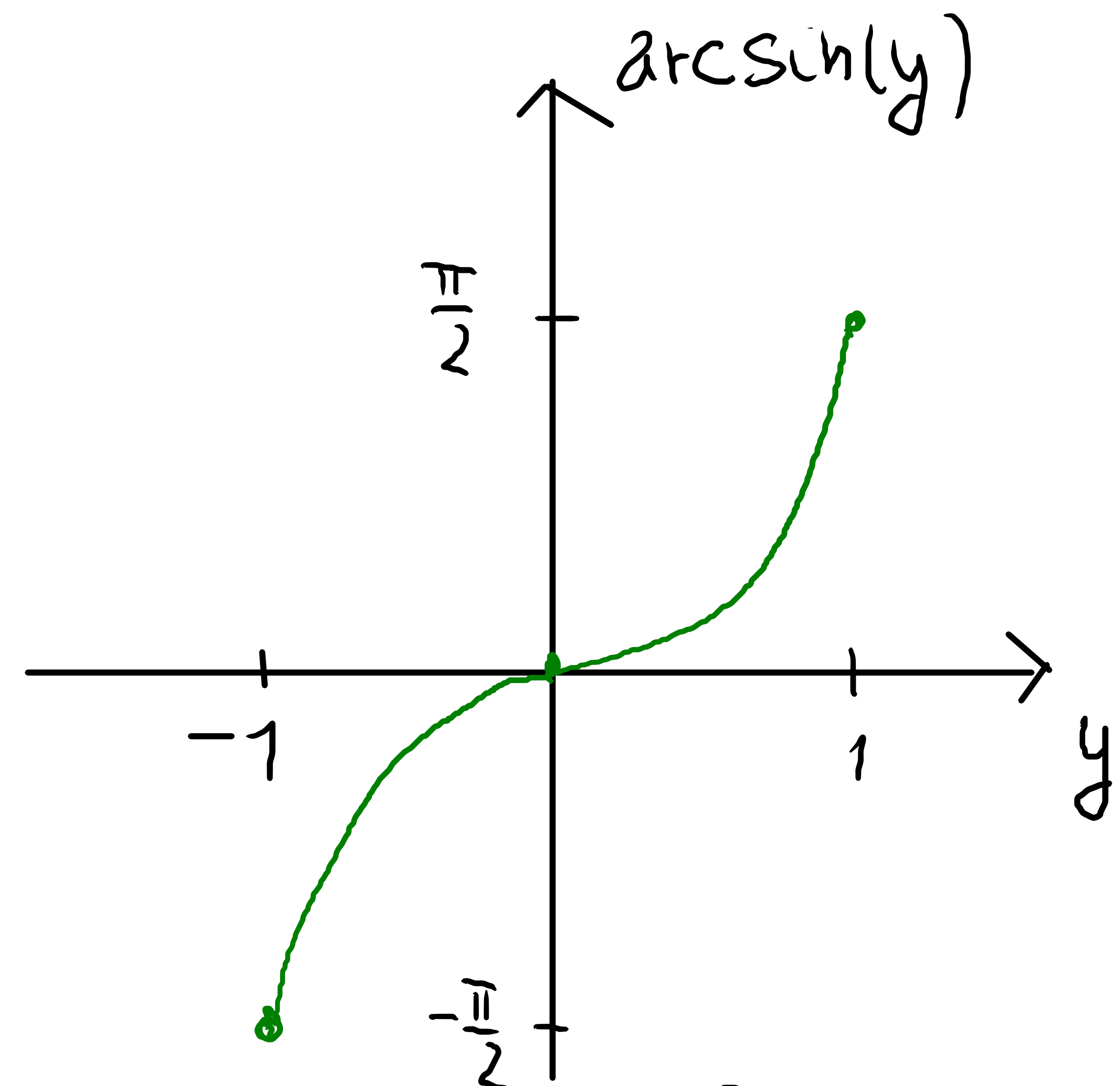
Le min est atteint pour $r \cong 4,76$

$h \cong \frac{324}{22,66} \cong 14,29 \ [cm]$

Fonctions trigonométriques

(1)



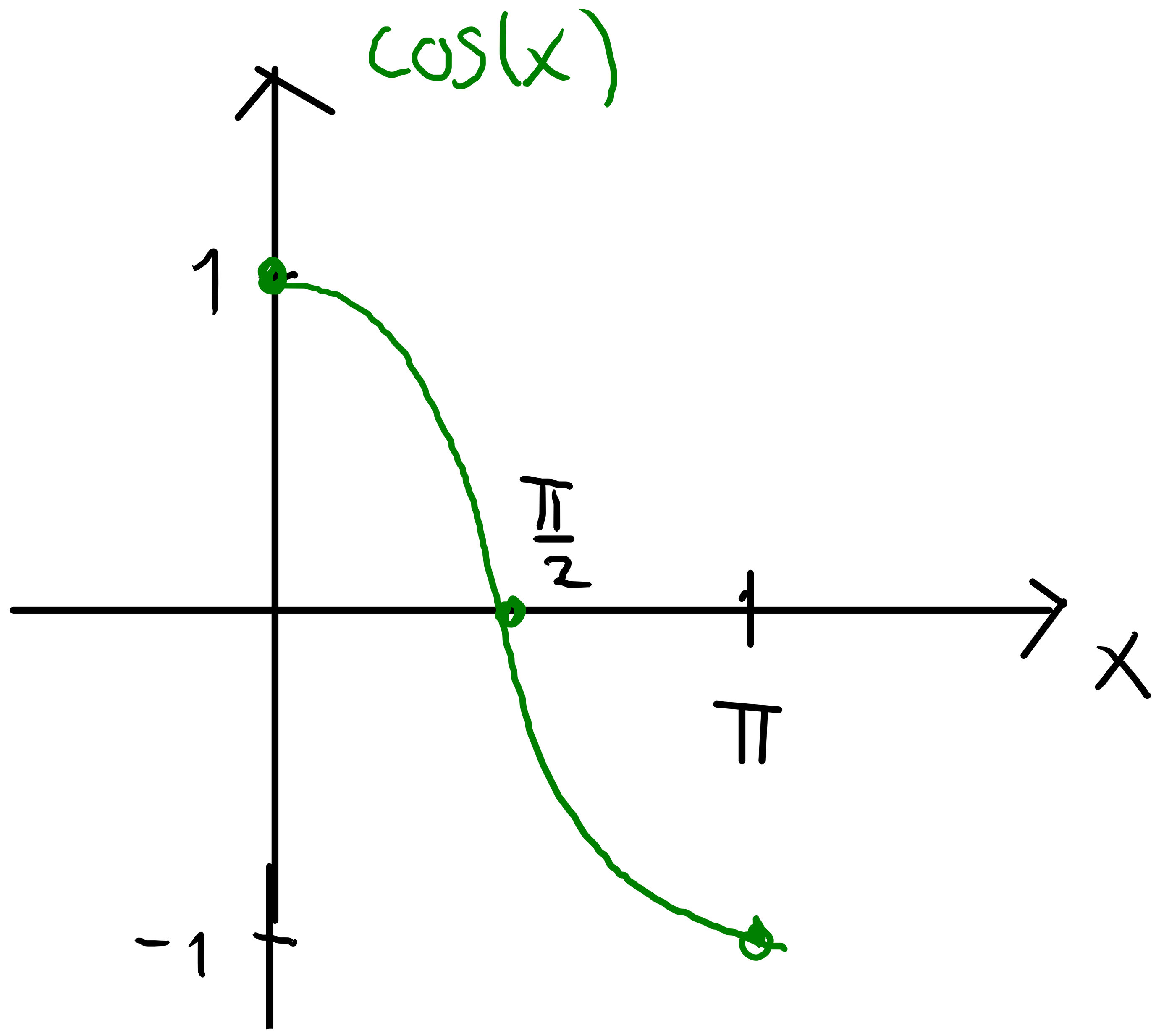


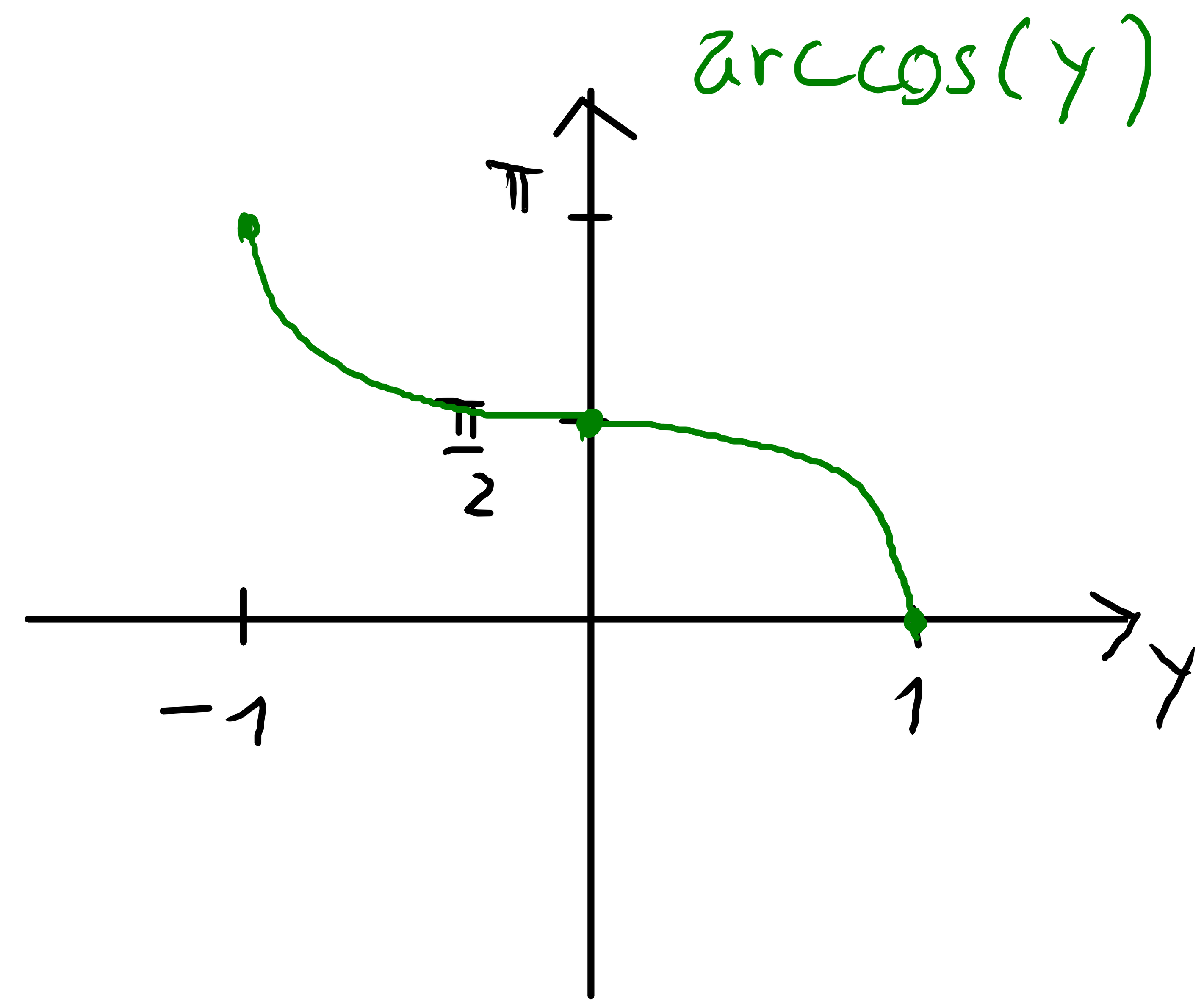
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1;1]$$
$$x \longmapsto \sin(x)$$

$$\arcsin : [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y \longmapsto \arcsin(y)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin\left(\sin(x)\right) = x$$

$$\forall y \in [-1;1], \quad \sin\left(\arcsin(y)\right) = y$$

② 



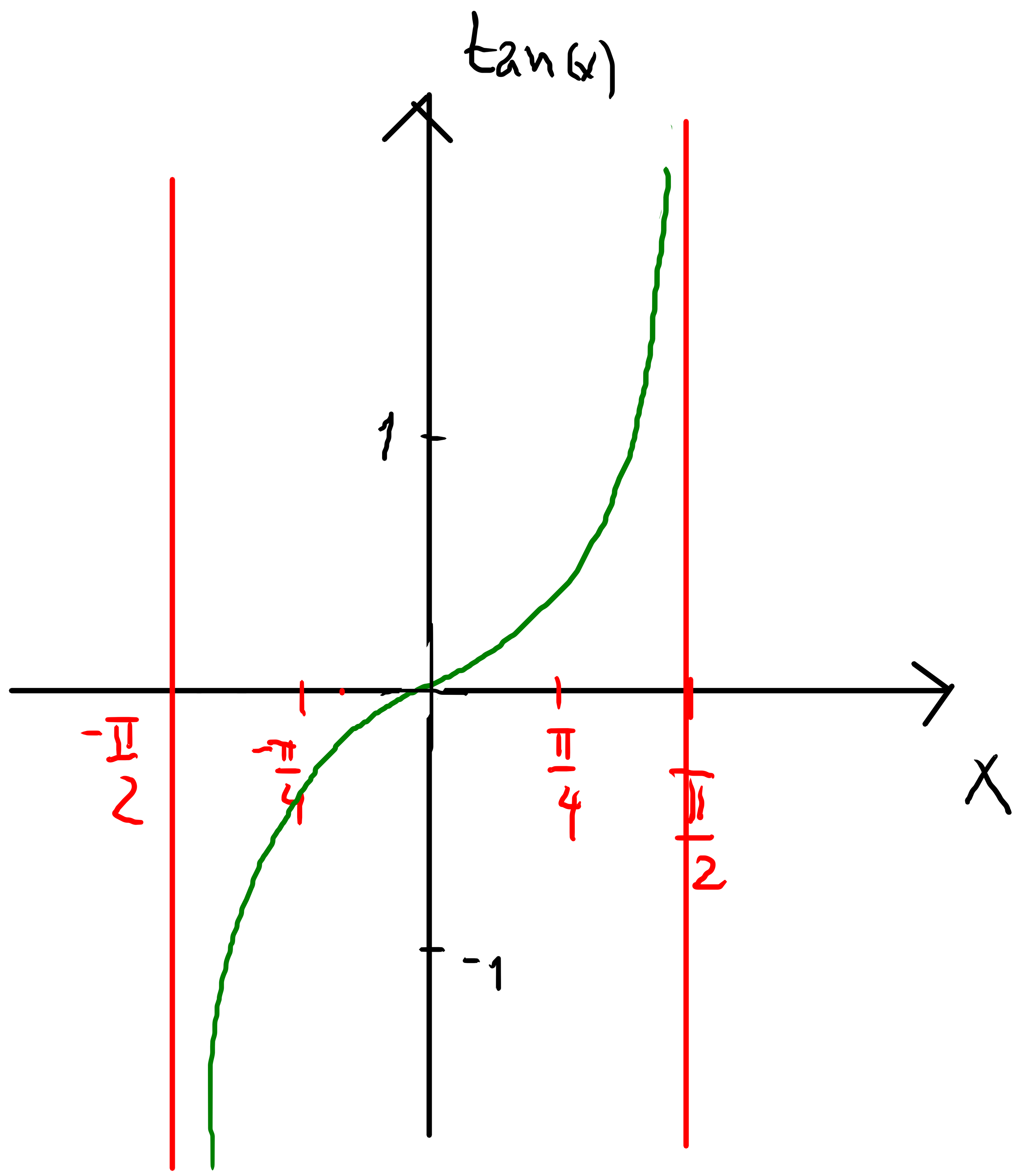
$$\cos: [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \longmapsto \cos(x)$$

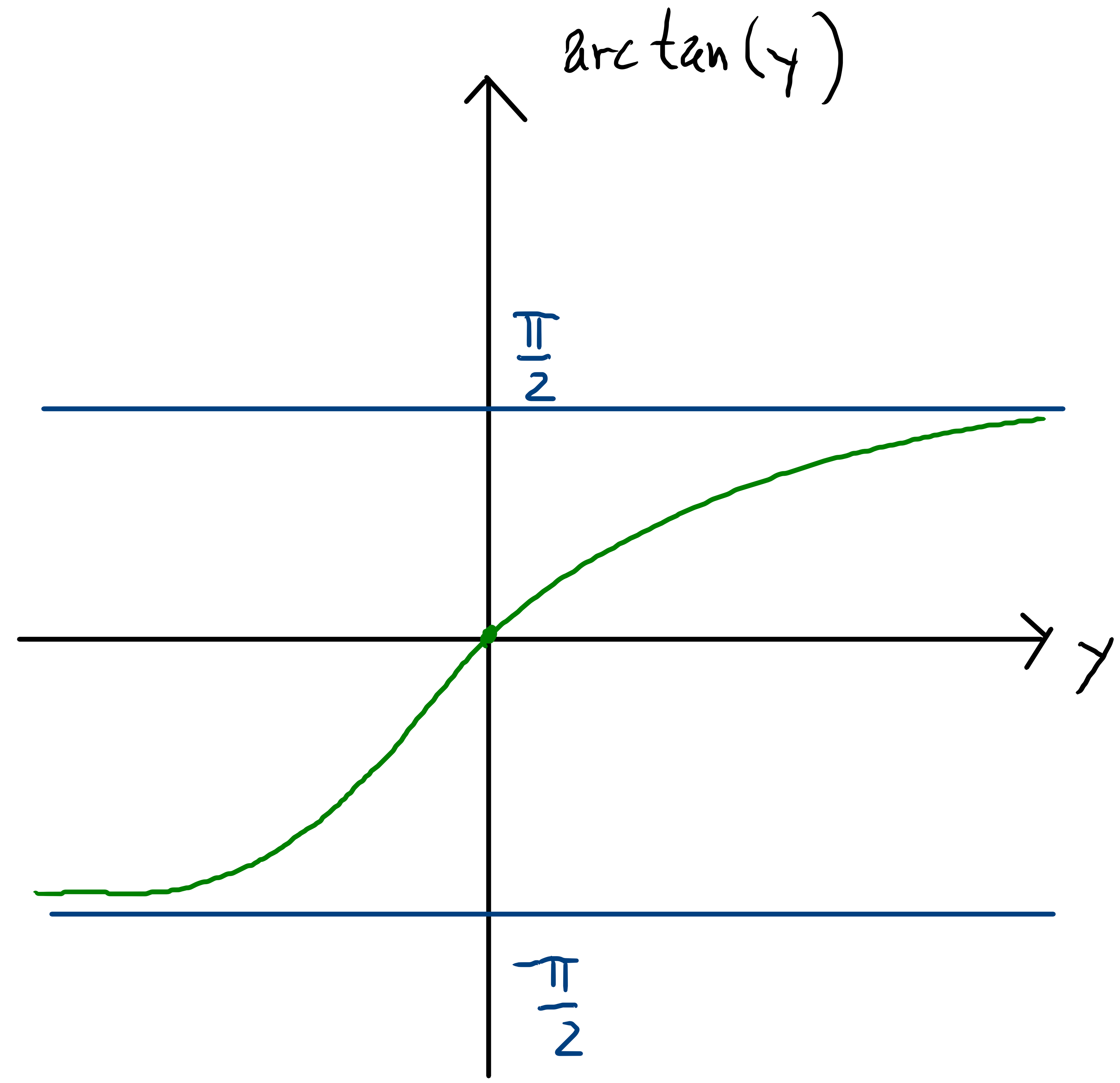
$$\operatorname{arccos}: [-1;1] \longrightarrow [0,\pi]$$
$$y \longmapsto \operatorname{arccos}(y)$$

$\forall x \in [0,\pi]$ $\quad \operatorname{arccos}(\cos(x)) = x$

$\forall y \in [-1;1]$ $\quad \cos(\operatorname{arccos}(y)) = y$

(3)





$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \tan(x)$$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan(\tan(x)) = x$

$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \tan(\arctan(y)) = y$

Dérivées des fonctions trigo réciproques

① $f(x) = \arcsin(x)$, $f'(x) = ?$

$$\sin\left(\arcsin(x)\right) = x \qquad \forall\ x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$$

$\downarrow$ dérivée

$$\cos\left(\arcsin(x)\right) \cdot \left(\arcsin(x)\right)' = 1$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\cos\left(\arcsin(x)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin(x)\right)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2(\alpha) \end{array}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\underbrace{\sin\left(\arcsin(x)\right)}_{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

② On démontre de même

$$\left(\arccos(x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

③ $\left(\arctan(x)\right)' = ?$

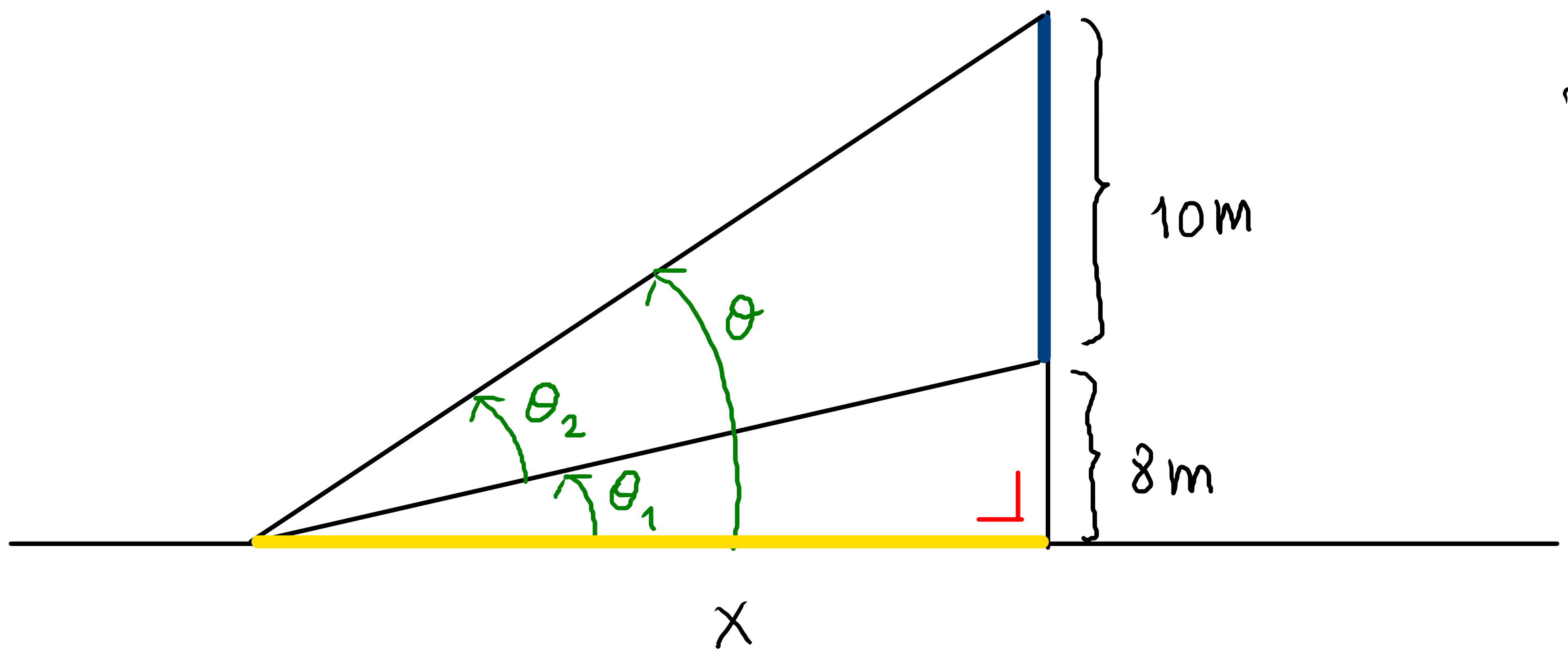
$$\tan\left(\arctan(x)\right) = x$$

$\downarrow$ dérivée

$$1 + \left[\underbrace{\tan\left(\arctan(x)\right)}_{x}\right]^2 \cdot \left(\arctan(x)\right)' = 1$$

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

2.11.2 Le bord inférieur d'un panneau publicitaire de 10 m de haut est situé 8 mètres au-dessus du niveau de l'oeil d'un observateur. On obtient le meilleur point de vue lorsque l'angle de vision est maximal. A quelle distance du tableau l'observateur doit-il se placer ?



Déterminer x pour que θ_2 soit maximal, pour $x > 0$

$$\theta_2 = \theta - \theta_1$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{8}{x}\right), \quad \theta = \arctan\left(\frac{18}{x}\right)$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{18}{x}\right) - \arctan\left(\frac{8}{x}\right)$$

D'où la fonction à dériver $\theta_2 = \theta_2(x) = \arctan\left(\frac{18}{x}\right) - \arctan\left(\frac{8}{x}\right)$, $x > 0$

$$\theta_2'(x) = \left(\frac{1}{1+\left(\frac{18}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{18}{x}\right)'\right) - \left(\frac{1}{1+\left(\frac{8}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{8}{x}\right)'\right) = \left(\frac{1}{1+\frac{324}{x^2}} \cdot \frac{-18}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{1+\frac{64}{x^2}} \cdot \frac{-8}{x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{x^2+324}{x^2}} \cdot \frac{-18}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{\frac{x^2+64}{x^2}} \cdot \frac{-8}{x^2}\right) = \frac{-18\cancel{x^2}}{(x^2+324)\cancel{x^2}} + \frac{8\cancel{x^2}}{(x^2+64)\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{-18}{x^2+324} + \frac{8}{x^2+64} = \frac{-18(x^2+64) + 8(x^2+324)}{(x^2+324)(x^2+64)} = \frac{-10x^2 + 1440}{(x^2+324)(x^2+64)}$$

$$= \frac{10(144 - x^2)}{(x^2+324)(x^2+64)} = \frac{10(12-x)(12+x)}{(x^2+324)(x^2+64)}$$

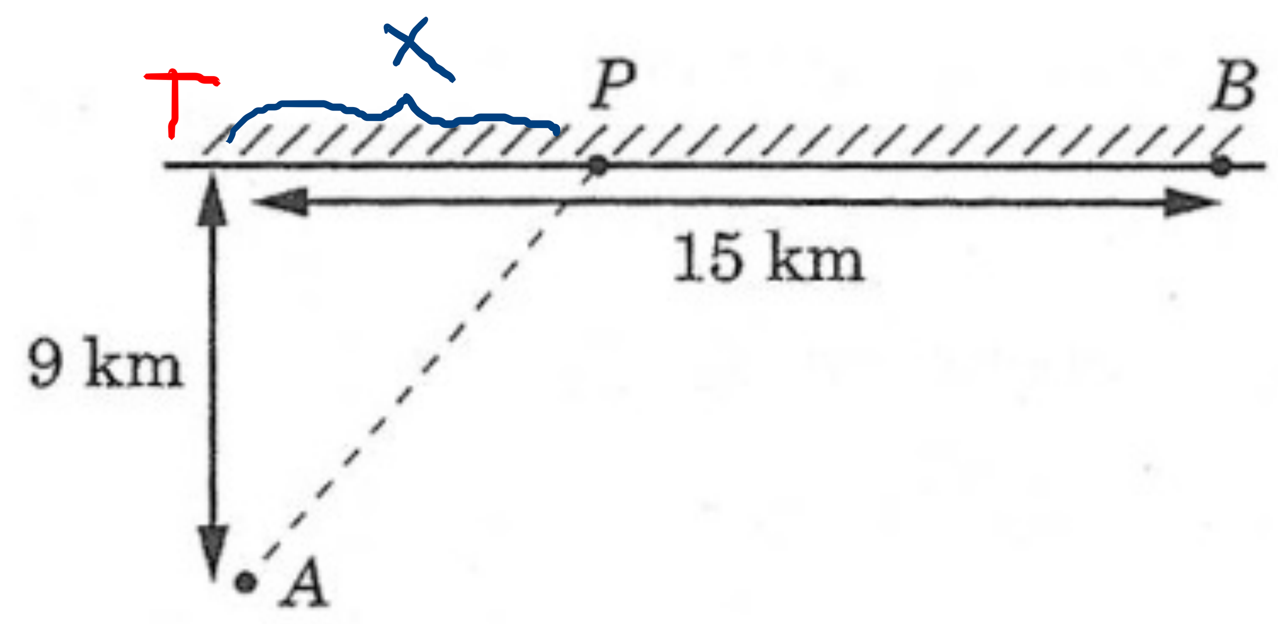
Tableau des variations

x	0		12	
$\theta_2'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$\theta(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\boxed{\max}$	$\searrow$

L'angle est maximal lorsqu'on se situe à 12 m du panneau.

$$\theta_2(12) = \arctan\left(\frac{18}{12}\right) - \arctan\left(\frac{8}{12}\right) \cong 56{,}3^\circ - 33{,}7^\circ = 22{,}6^\circ$$

2.10.23 Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



$$d = v \cdot t \qquad \left[\frac{km}{\cancel{h}} \cdot \cancel{h} \right]$$