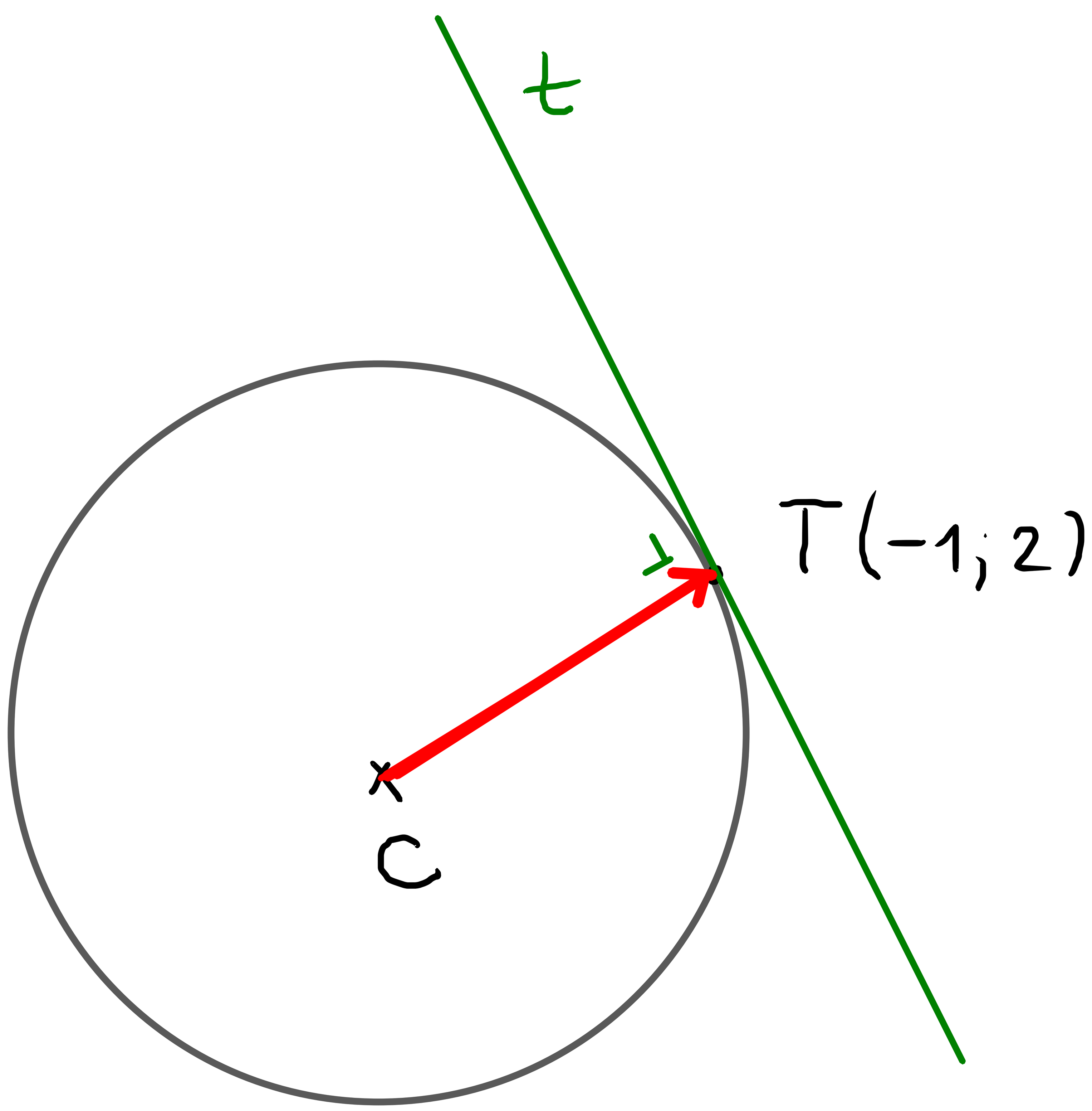
22,05,24

3.3.16 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle γ, Déterminer les équations des tangentes à γ au point T dans les cas suivants :

a) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 5$;

b) $T(-5;7)$ et $\gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$;

a) $T \overset{?}{\in} \gamma$: $(-1)^2 + (2)^2 = 5$ ✓ $\Rightarrow T \in \gamma$



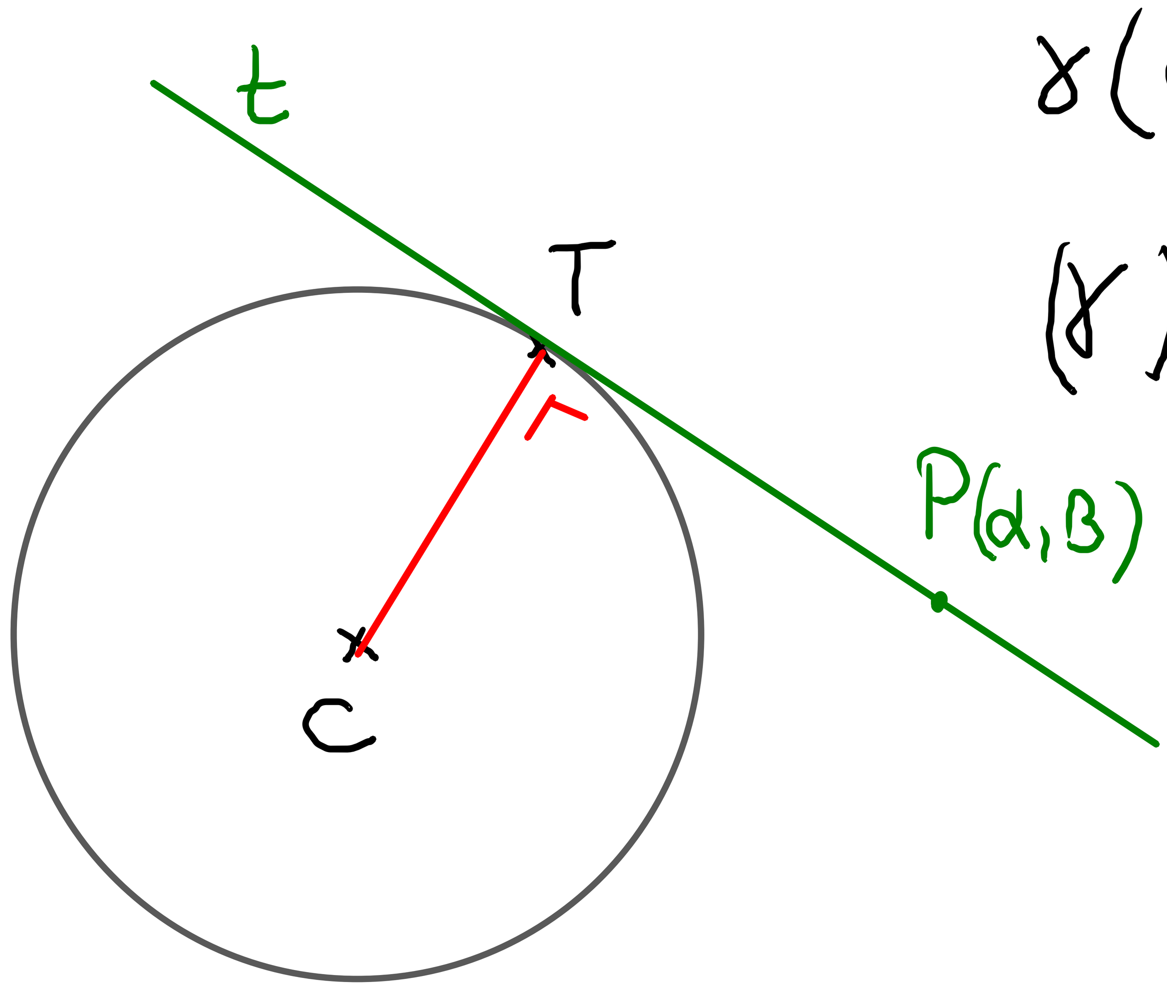
$\underline{\overrightarrow{CT}} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \perp t$

(t) : $-x + 2y + c = 0$

Par T : $1 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -5$

$\underline{(t) : -x + 2y - 5 = 0}$

Tangente à un cercle par un point du cercle



$\gamma(C, r) \quad , \quad T(t_1, t_2)$

$(\gamma) : (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$

Soit $P \in t$, P distinct de T. Posons $P(\alpha, \beta)$

La condition $\vec{CT} \perp \vec{TP}$

$$\vec{CT} = \begin{pmatrix} t_1 - c_1 \\ t_2 - c_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{TP} = \begin{pmatrix} \alpha - t_1 \\ \beta - t_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{CP} = \begin{pmatrix} \alpha - c_1 \\ \beta - c_2 \end{pmatrix}$$

1) $\vec{CT} \perp \vec{TP} \Leftrightarrow \vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0 \Leftrightarrow (t_1 - c_1)(\alpha - t_1) + (t_2 - c_2)(\beta - t_2) = 0$

2) $\vec{CP} \cdot \vec{CT} = (\vec{CT} + \vec{TP}) \cdot \vec{CT} = \underbrace{\vec{CT} \cdot \vec{CT}}_{\|\vec{CT}\|^2} + \underbrace{\vec{TP} \cdot \vec{CT}}_{0} = r^2$

$= \|\vec{CT}\|^2 + 0$

$\Rightarrow \vec{CT} \cdot \vec{CP} = r^2$

$(t_1 - c_1)(\alpha - c_1) + (t_2 - c_2)(\beta - c_2) = r^2$

$P \in t$ qcq

$$\boxed{(t) : (t_1 - c_1)(x - c_1) + (t_2 - c_2)(y - c_2) = r^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{(t_1 - c_1)(x - c_1) + (t_2 - c_2)(y - c_2) = r^2}$$

b) $T(-5;7)$ et $\gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$;

Cette méthode pour déterminer la tangente s'appelle la méthode du dédoublement :

$T \in \gamma$ ✓

$(\gamma) : \quad (x+2)(x+2) + (y-3)(y-3) = 25$

$(t) : \quad (-5+2)(x+2) + (7-3)(y-3) = 25$

$-3x - 6 + 4y - 12 - 25 = 0$

$(t) : \quad -3x + 4y - 43 = 0$

c) $T(0;0)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y\,;$

(γ) : $x^2 - 3x + y^2 + 7y = 0$

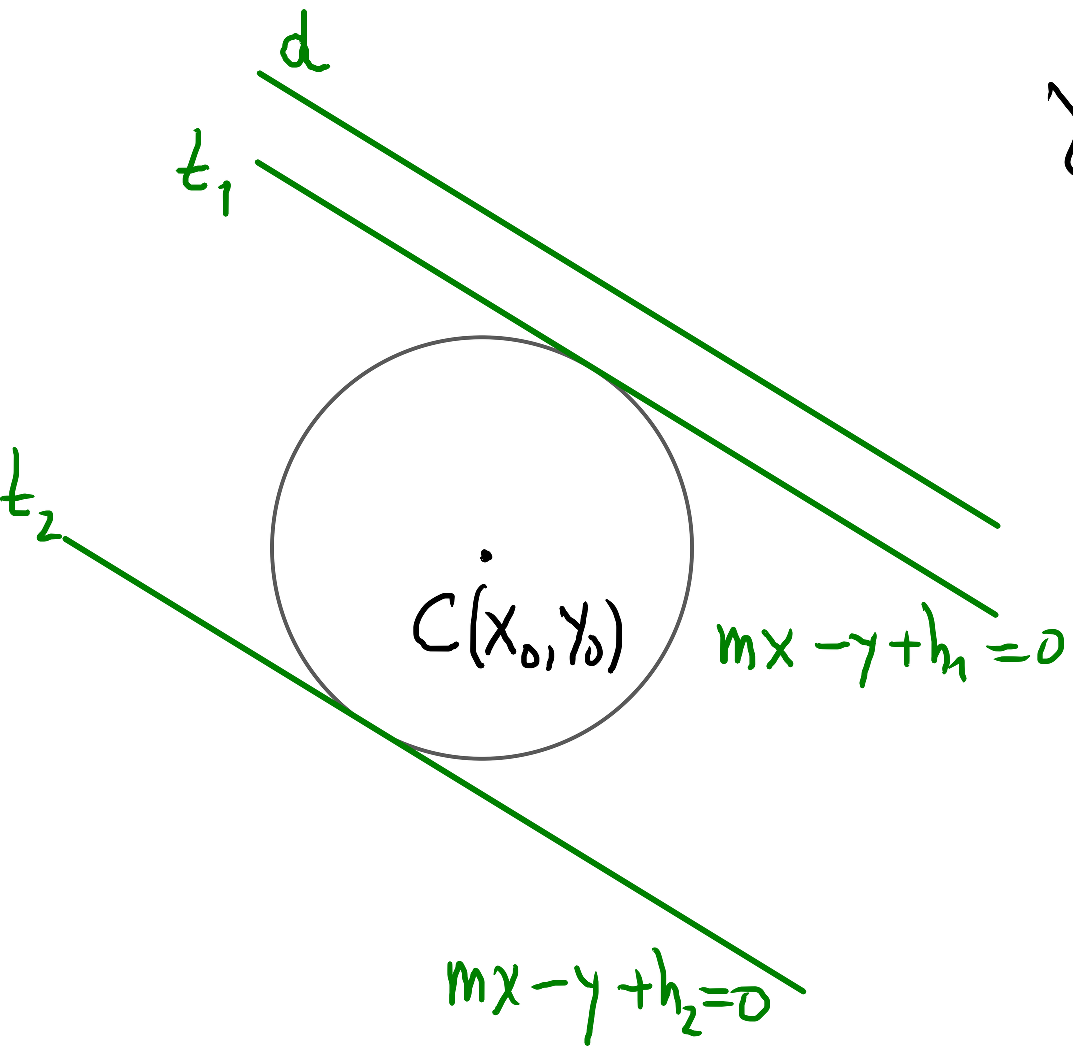
(γ) dédoublée : $x \cdot x - 1.5x - 1,5x + y \cdot y + 3,5y + 3,5y = 0$

(t) : $-1,5x + 3,5y = 0$

(t) : $-3x + 7y = 0$

Tangentes à un cercle par un point hors du cercle

Pour cela, nous allons calculer les tangentes de pente m donnée.



γ cercle de centre $C(x_0, y_0)$ et de rayon r

Soit d une droite de pente m.

$\boxed{(d): \quad mx - y + h = 0}$. Posons $(t): mx - y + K = 0$

Si t est tangente à γ, alors $\delta(C, t) = r$

Donc
$$\frac{|m x_0 - y_0 + K|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

$$\Rightarrow \quad |m x_0 - y_0 + K| = r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$m x_0 - y_0 + K = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$K = y_0 - m x_0 \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

En substituant K dans l'équation

$$y = mx + y_0 - m x_0 \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$(t) \quad \boxed{y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2 + 1}}$$

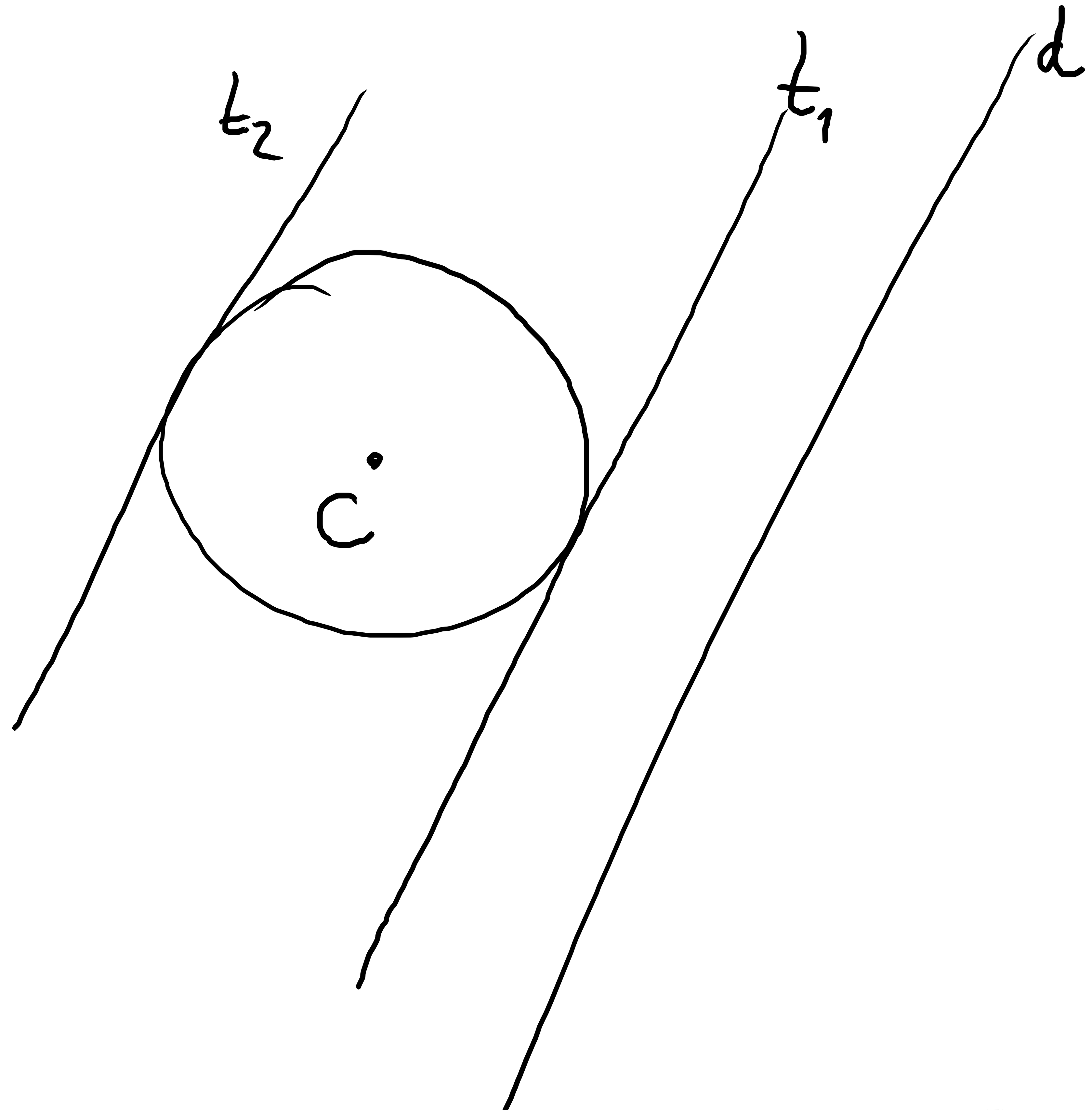
Tangentes à γ de pente m :

$$\boxed{y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}}$$

3.3.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$, de direction donnée par la droite $2\,x + y = 7$.

(γ) : $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$; (d) : $2\,x + y = 7.$

$m = -2$



$C(-5\,;\,1)$, $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Tangentes à γ de pente m :

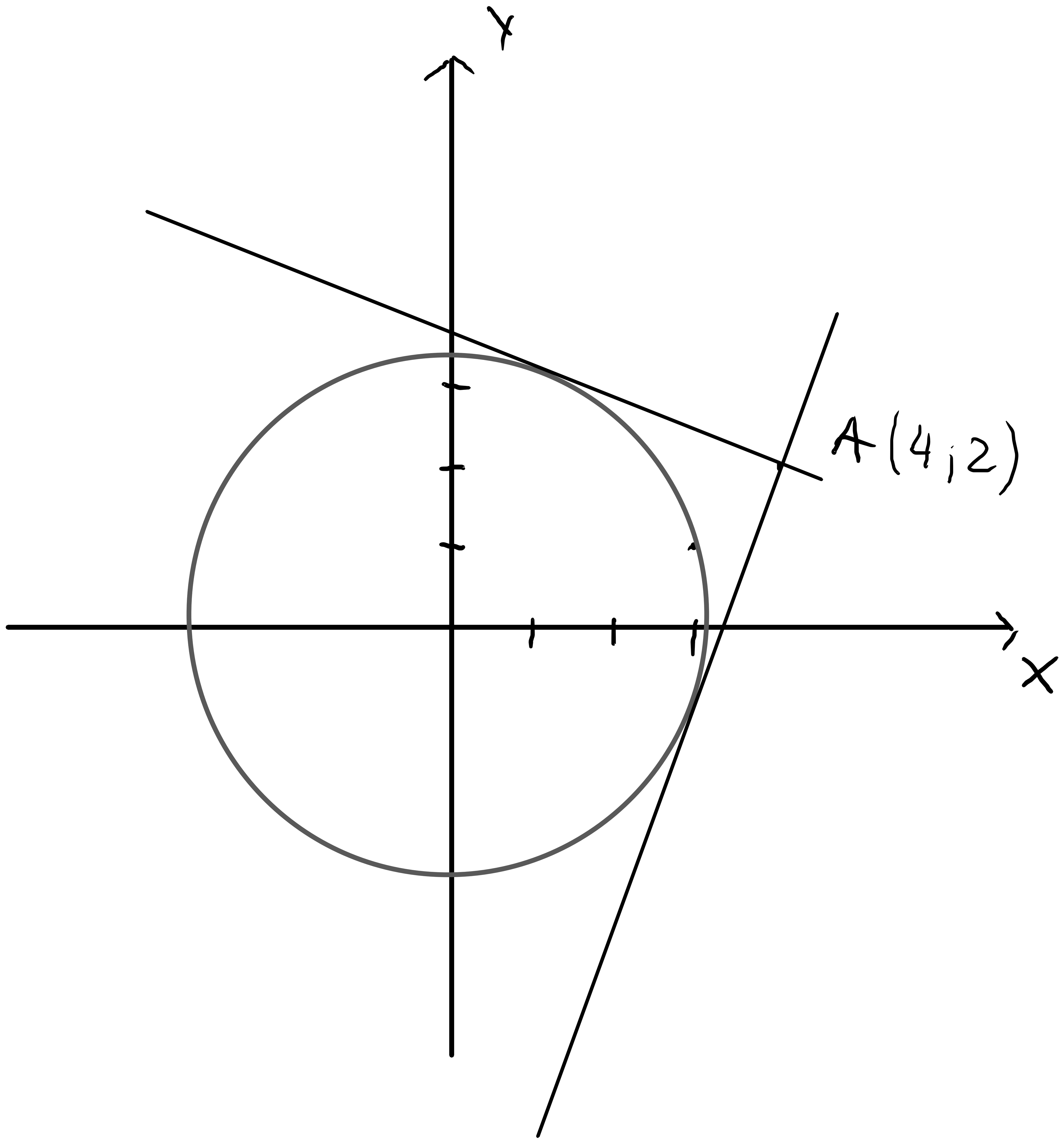
$$\boxed{y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$

(t_1) : $y - 1 = -2(x + 5) + 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$

$y - 1 = -2x - 10 + 10$

(t_2) : $y - 1 = -2x - 10 - 10$

3.3.23 On mène par le point $A(4;2)$ les tangentes au cercle $x^2+y^2=10$. Calculer l'angle entre ces tangentes.



Tangentes à γ de pente m :

$$\boxed{\underset{2}{y} - \underset{0}{c_2} = m(\underset{4}{x} - \underset{0}{c_1}) \pm \underset{\sqrt{10}}{r}\sqrt{m^2+1}}$$