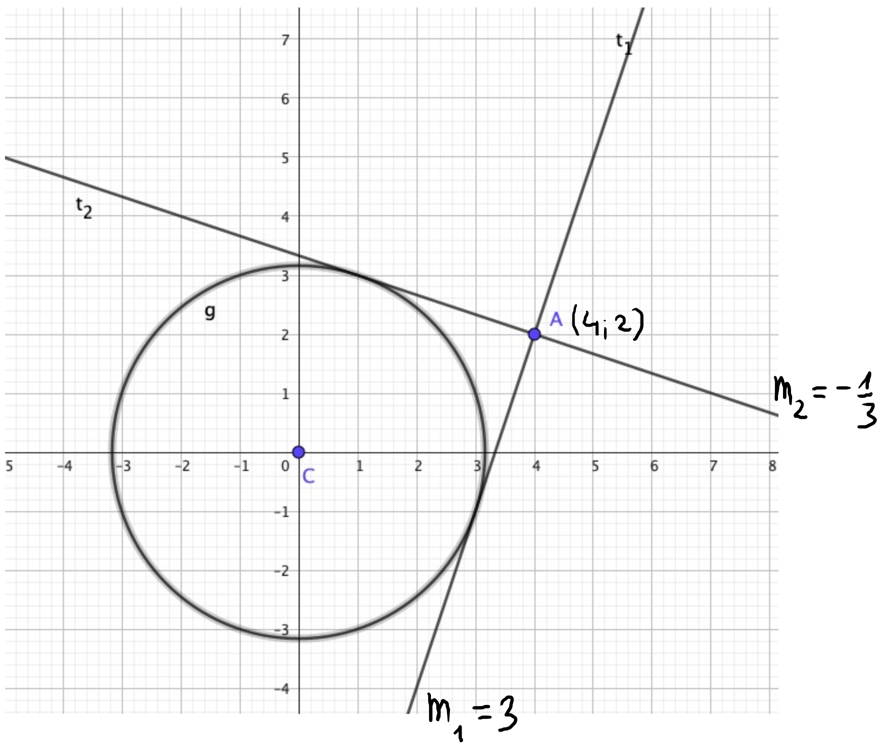
23.05.24

3.3.23 On mène par le point $A(4;2)$ les tangentes au cercle $x^2+y^2=10$. Calculer l'angle entre ces tangentes.



Tangentes à γ par un point extérieur E :

Soit $E(e_1;e_2)$ un point extérieur à γ. L'équation

$$\boxed{e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$

fournit les pentes des tangentes (non verticales) issues de E.

$$2-0 = m(4-0) \pm \sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$$

$$2 = 4m \pm \sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$$

$$-4m + 2 = \pm\sqrt{10}\sqrt{m^2+1} \qquad |\ (\ )^2$$

$$16m^2 - 16m + 4 = 10(m^2+1)$$

$$16m^2 - 16m + 4 = 10m^2 + 10$$

$$6m^2 - 16m - 6 = 0 \qquad |\ \div 2$$

$$3m^2 - 8m - 3 = 0$$

$$(3m+1)(m-3) = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$m_2 = -\frac{1}{3} \qquad m_1 = 3$$

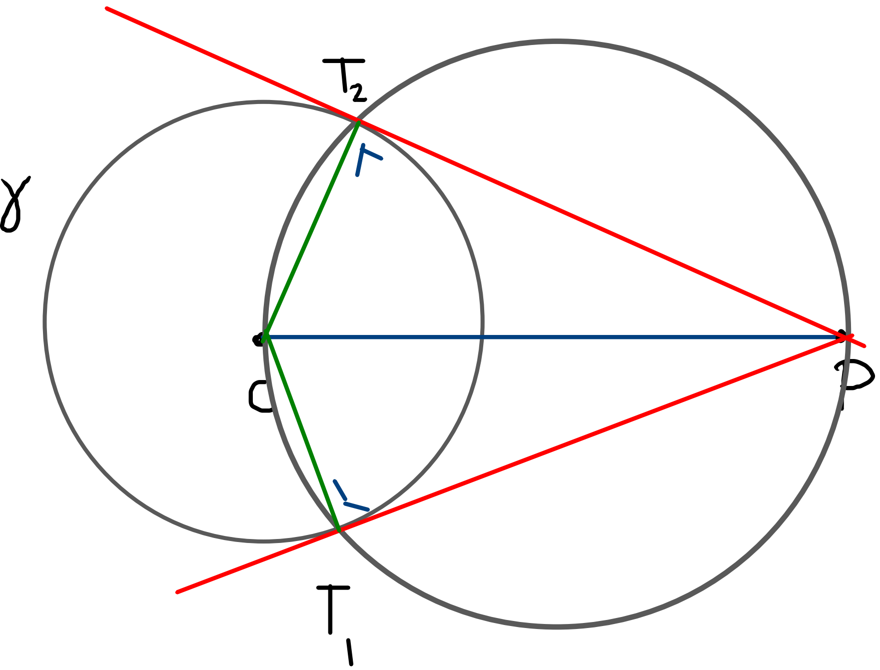
Comme $m_1 \cdot m_2 = -1$, les droites sont perpendiculaires

Si on doit donner l'équation des deux tangentes, on a :

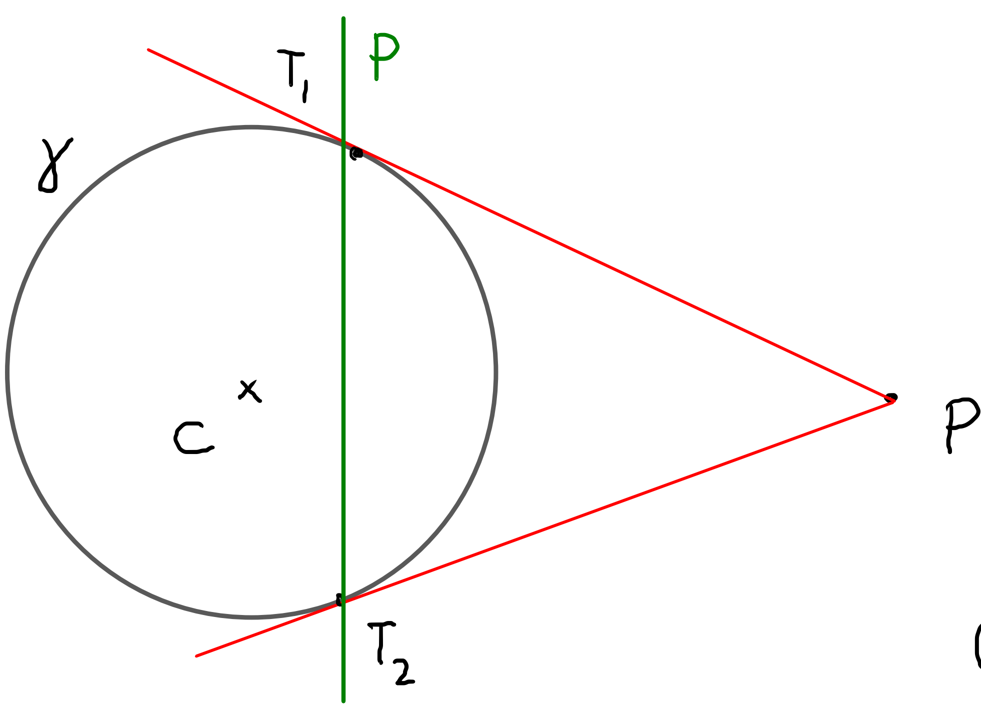
(t_1) : $y = 3x + h_1$ $\qquad 2 = 12 + h_1 \Rightarrow h_1 = -10$, $y = 3x - 10$

(t_2) : $y = -\frac{1}{3}x + h_2$ $\qquad 2 = -\frac{4}{3} + h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{10}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

Construction des tangentes à un cercle par un point extérieur au cercle



On construit les deux tangentes avec le cercle de Thalès



Si $T_1 T_2$ sont les points de contact des deux tangentes issues de P, extérieur au cercle, la droite $T_1 T_2$ est la polaire de P par rapport à γ.

On obtient la polaire en dédoublant l'équation du cercle.

Exemple

$(\gamma): (x-4)^2+(y+1)^2=5 \quad , \quad C(4;-1)$

$P(9;4)$ extérieur à γ

$\vec{PC} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\|\vec{PC}\| = 5\sqrt{2} > r$

Déterminons les tangentes à γ par P.

1) Avec les pentes

Les tangentes ont pour équation : $y+1 = m(x-4) \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

$P(9,4)$ est sur ces tangentes : $5 = 5m \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

$$5-5m = \pm\sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \qquad (\ )^2$$

$$25-50m+25m^2 = 5(m^2+1) \qquad \div 5$$

$$5-10m+5m^2 = m^2+1$$

$$4m^2-10m+4 = 0 \qquad \div 2$$

$$2m^2-5m+2 = 0$$

$$(2m-1)(m-2) = 0$$

On a les deux pentes : $m_1 = \frac{1}{2}$ et $m = 2$.

Les tangentes :

$(t_1) : y = \frac{1}{2}x + h_1$

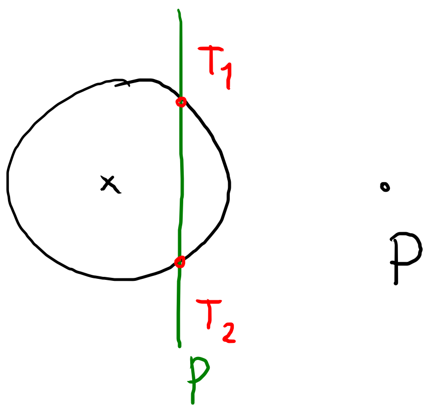
$(t_2) : y = 2x + h_2$

$\overset{P(9,4)}{\Longrightarrow}$

$(t_1) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$(t_2) : y = 2x - 14$

2) Avec la polaire



$(\gamma) : (x-4)(x-4) + (y+1)(y+1) = 5$

$(p) : 5(x-4) + 5(y+1) = 5 \quad \Big| \div 5$

$(p) : x + y - 4 = 0$

Déterminons les points de contact :

$$\begin{cases} 1) \ (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ 2) \ y = -x + 4 \end{cases}$$

$1) \Rightarrow \quad (x-4)^2 + (-x+5)^2 = 5$

$x^2 - 8x + 16 + x^2 - 10x + 25 = 5$

$2x^2 - 18x + 36 = 0$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x-6)(x-3) = 0$

Donc : $\begin{cases} x = 6 \text{ et } y = -2 & T_1(6; -2) \\ x = 3 \text{ et } y = 1 & T_2(3; 1) \end{cases}$

$T_1\,(6\,;-2)$

$T_2\,(3\,;\,1)$

Calculons les équations des tangentes :

(PT_1) : $\dfrac{y-4}{x-9} = \dfrac{-2-4}{6-9} = \dfrac{-6}{-3} = \dfrac{2}{1}$

$\Leftrightarrow\ 2(x-9) = y-4 \quad \Rightarrow \quad \underline{2x - y - 14 = 0}$

(PT_2) : $\dfrac{y-4}{x-9} = \dfrac{1-4}{3-9} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ x-9 = 2(y-4) \quad \Rightarrow \quad \underline{x - 2y - 1 = 0}$