L'ensemble des nombres complexes

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{N}$: entiers naturels

$\mathbb{Z}$: entiers relatifs

$\mathbb{Q}$: ensemble des fractions réelles

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

Quelles sont les solutions de l'équation

$$x^2 = -1$$

Dans $\mathbb{R}$, cette équation n'admet aucune solution.

Nous allons construire un ensemble (en fait un corps) dans lequel la condition suivante est vérifiée :

(A) Toute équation du type $x^2 = m$, où $m \in \mathbb{R}_-^*$ admet une solution dans cet ensemble.

La condition (A) est équivalente à la condition suivante

(A') cet ensemble contient un élément dont le carré vaut -1.

Désignons cet élément par la lettre i

Montrons l'équivalence des deux conditions.

$(A) \Rightarrow (A')$: évident

$(A') \Rightarrow (A)$ démontrons cette équivalence.

Nous avons $i^2 = -1$.

$$(i\sqrt{-m})^2 = i^2 \cdot (-m) = -1 \cdot (-m) = m$$

Remarquons que $-i\sqrt{-m}$ est aussi solution de cette équation.

En effet $(-i\sqrt{-m})^2 = i^2 \cdot (-m) = m$

<u>Exemple</u> $\quad x^2 = -9$

$$x = \begin{cases} 3i \\ -3i \end{cases}$$

<u>Preuve</u> 1 : $\quad (3i)^2 = 3i \cdot 3i = 3 \cdot 3 \cdot i \cdot i = 9i^2 = -9$

$(-3i)^2 = 3i \cdot 3i = -9$

Cet ensemble, noté $\mathbb{C}$, s'appelle l'ensemble des nombres complexes.

Un nombre complexe s'écrit

$$z = a + b\,i$$

a est la partie réelle de z

b est la partie imaginaire de z

Exemples : 0, -7, $1+i$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $\sqrt{17}\,i$

Propriétés : soit $a, b \in \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$

① $a+bi + 0 = a+bi$

$0+0i = 0$ est l'élément neutre de $\mathbb{C}$ pour l'addition

② $(a+bi) + (-a-bi) = 0$

$-a-bi$ est l'inverse de $a+bi$

③ $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

$(3+4i) + (7-2i) = 10 + 2i$

④ $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$

$= (ac-bd) + (ad+bc)\,i$

$(3+4i)(7-2i) = (21+8) + (-6+28)\,i = 29 + 21i$

⑤ $z = a+bi$, on appelle $\bar{z} = a-bi$ le conjugué de z.

$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

$(3+4i)(3-4i) = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$

⑥ $1 \div i = \frac{1}{i} \cdot 1 = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$

$\frac{1}{i} = -i$

⑦ $\frac{1}{3+4i} \cdot \underbrace{\frac{3-4i}{3-4i}}_{1} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

$\frac{1}{3+4i} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

1.1.1

$(1+i) \div (1-i)$

l) $\frac{1+i}{1-i} \; \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$

k) $\frac{1}{2+3i} \; \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4-9i^2} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

m) $\frac{5+3i}{2+4i} \; \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{10-20i+6i+12}{4+16} = \frac{22-14i}{20} = \frac{22}{20} - \frac{14}{20} i$

$= \frac{11}{10} - \frac{7}{10} i$