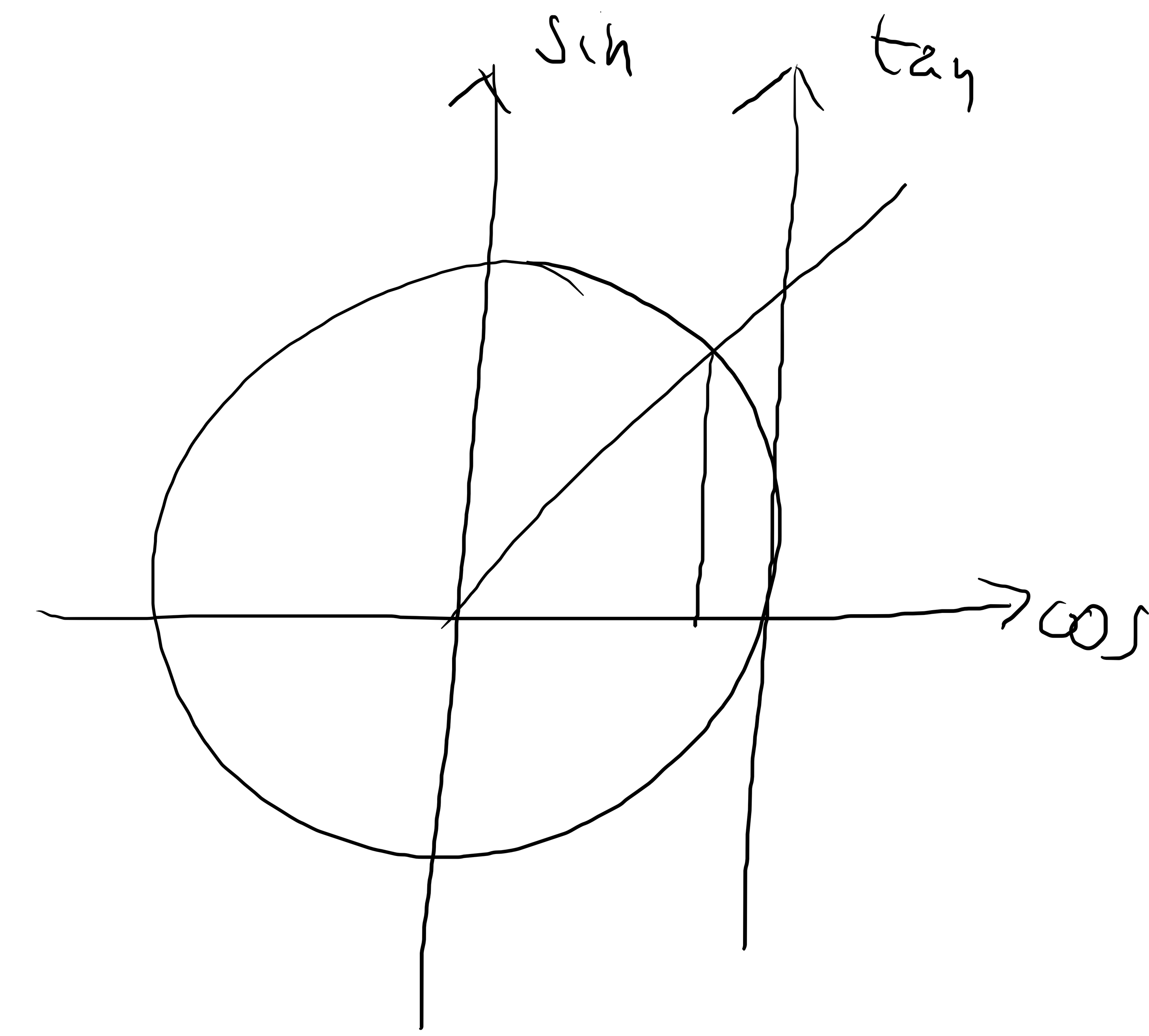
24.01.23

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x} = \overbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{20\cdot\left(\frac{x}{4}\right)}}^{=1} = \frac{1}{20}$$



g) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\underset{\substack{\| \\ 1-\cos^2(x)}}{\sin^2(x)}} \overset{\text{lhd}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1-\cos(x)}}{\cancel{(1-\cos(x))}(1+\cos(x))} = \frac{1}{2}$$

2.8.3 On considère les 12 fonctions rationnelles :

$$f_1(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1} \qquad f_2(x) = -2x+5+\frac{1}{x+1} \qquad f_3(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-7} \qquad f_5(x) = \frac{2x}{x-7} \qquad f_6(x) = \frac{1}{(x+1)(x+10)}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f_8(x) = -2x+5+\frac{1}{x-5} \qquad f_9(x) = 1+\frac{7}{x^2-4}$$

$$f_{10}(x) = 1+\frac{7}{x^2+4} \qquad f_{11}(x) = -2x+5+\frac{1}{x^2+5} \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$$

	Asymptote verticale	*Asymptote horizontale ou oblique*
1) f_7	$x=-1$	$y=0$
2) f_{12}	$x=-1,\ x=-10$	$y=2$
3) f_1	aucune	$y=2$
4) f_5	$x=7$	$y=2$
5) f_9	$x=-2,\ x=2$	$y=1$
6) f_8	$x=5$	$y=-2x+5$
7) f_3	$x=-1$	$y=2$
8) f_{10}	aucune	$y=1$
9) f_2	$x=-1$	$y=-2x+5$
10) f_4	$x=7$	$y=0$
11) f_{11}	aucune	$y=-2x+5$
12) f_6	$x=-1,\ x=-10$	$y=0$

2.8.4 Trouver une fonction admettant les asymptotes suivantes :

a) $x = -4$, $x = 2$, $y = 3$

AV AH

b) $y = 2x - 5$, $x = 1$

AO AV

a) $f(x) = 3 + \frac{1}{(x+4)(x-2)} = \frac{3x^2}{(x+4)(x-2)}$

b) $f(x) = 2x - 5 + \frac{1}{(x-1)} =$

2.8.5 Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^n + 3}{x^2 - 9}$.

- $f_n(x) = \dfrac{x^n + 3}{(x-3)(x+3)}$ n est un paramètre

- $n = 0$: $f_0(x) = \dfrac{4}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{4}{x^2-9}$ AV: $x = 3$ et $x = -3$ AH : $y = 0$

- $n = 1$: $f_1(x) = \dfrac{\cancel{x+3}\ 1}{(x-3)\cancel{(x+3)}}$ AV: $x = 3$ ~~et $x = -3$~~ Pont-Trou $\left(-3\ ;\ -\frac{1}{6}\right)$ AH: $y = 0$

- $n = 2$: $f_2(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 9}$ AV: $x = 3$ et $x = -3$ AH: $y = 1$

- $n = 3$: $f_3(x) = \dfrac{x^3 + 3}{x^2 - 9}$ AV: $x = 3$ et $x = -3$ AO : $y = x$

- $n \geq 4$: $f_n(x) = \dfrac{x^n + 3}{x^2 - 9}$ AV: $x = 3$ et $x = -3$ pas AH, AO

$n = 3$

$$
\begin{array}{rl|l}
x^3 \;\ldots\;\ldots & +3 & x^2 - 9 \\ \cline{3-3}
x^3 \quad -9x & & x \\ \cline{1-2}
\text{reste} \quad 9x & +3 &
\end{array}
$$

$f_3(x) = x + \dfrac{9x + 3}{x^2 - 9}$

<u>Les dérivées</u>

Leibniz

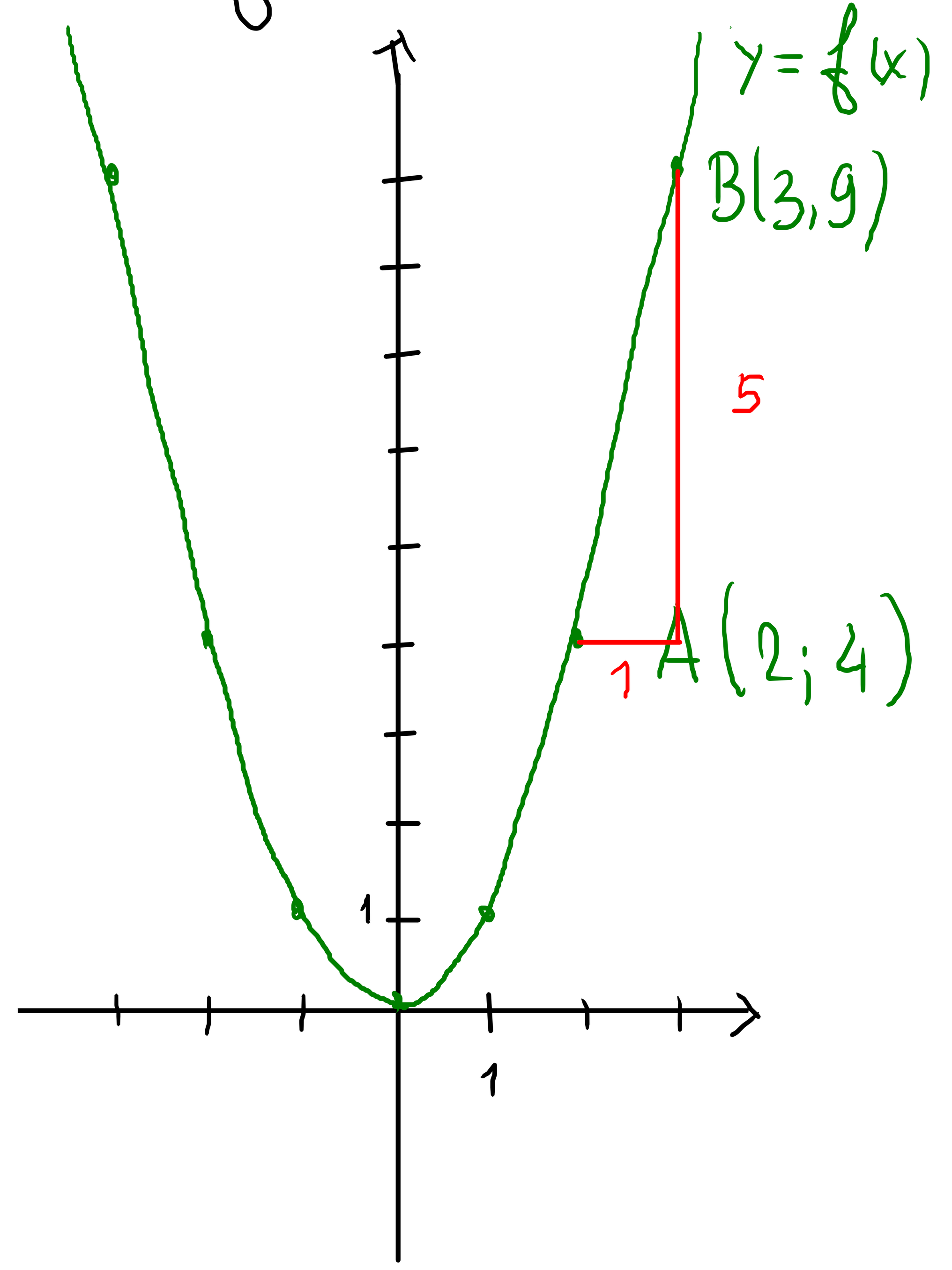
Newton

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

Exemple

Représentons $f(x) = x^2$.



Considérons le point $A(2;4)$ sur le graphique et $B(3;9)$

1) Quelle est la pente de la fonction affine qui passe par A et B ?

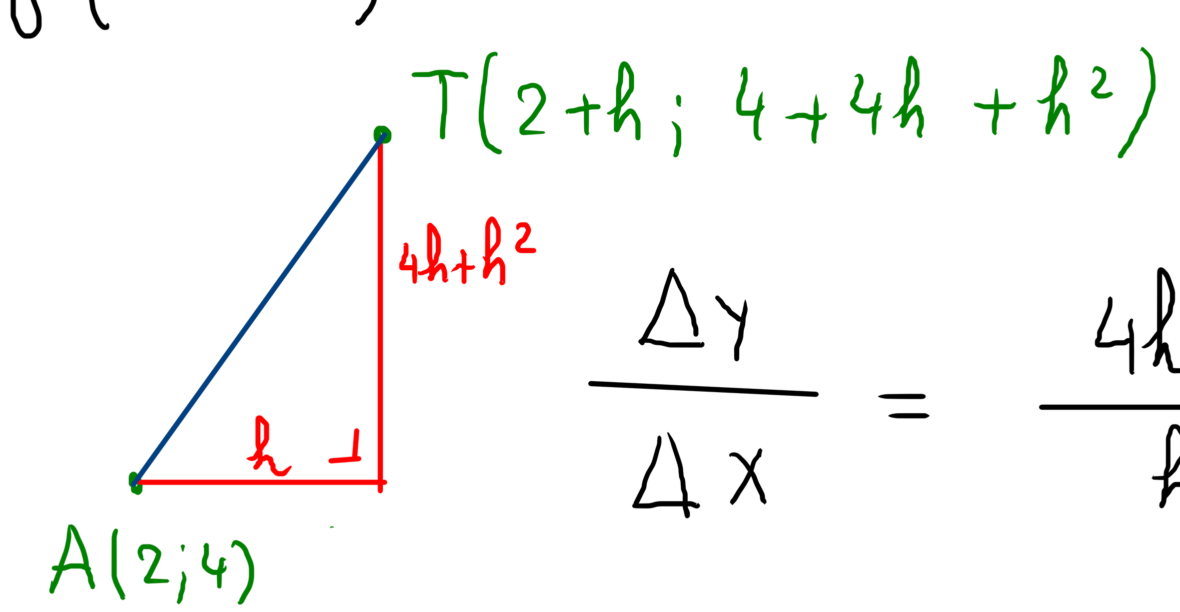
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{1} = 5$$

2) Prenons $A'(2{,}001 \,;\, 4{,}004001)$ est aussi sur le graphique. La pente de la fonction affine qui passe par A et A'

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}004001}{0{,}001} = 4{,}001$$

3) Soit $h \in \mathbb{R}$. Considéron le point T d'abcisse $2+h$ sur la courbe.

$$f(2+h) = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4h+h^2}{h}$$

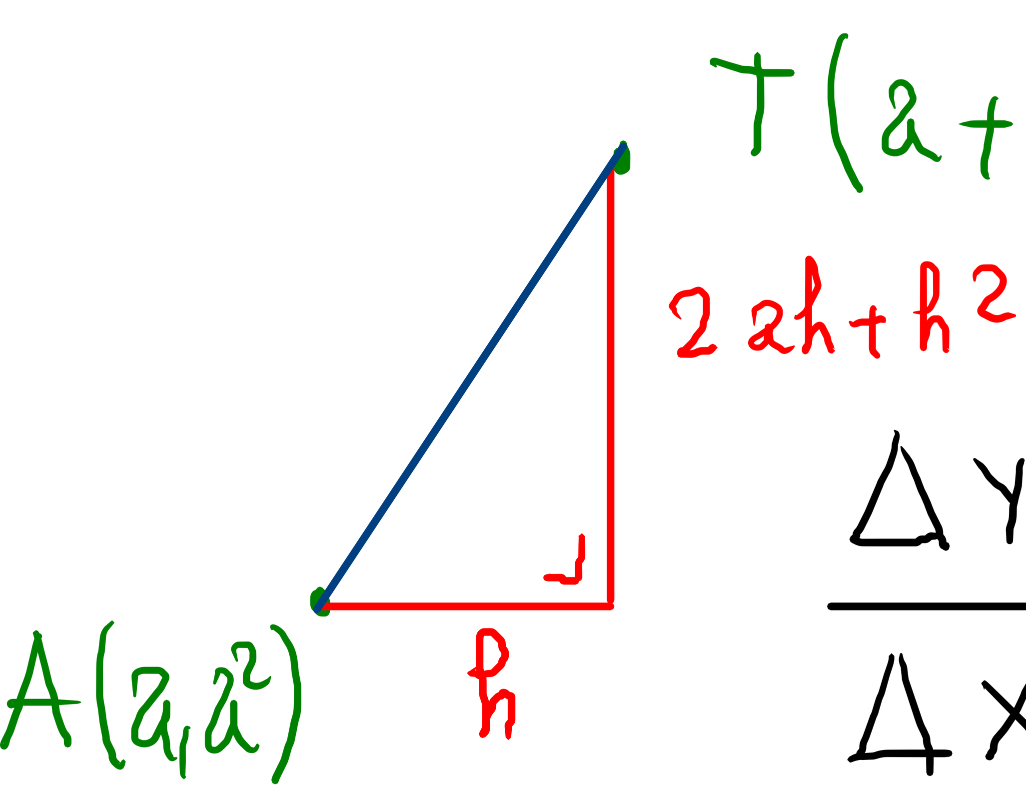
Passons à la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{4h+h^2}{h} \underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\underset{1}{\cancel{h}}} = 4$$

La pente de la tangente au point A est égal à 4.

Déterminons une formule qui me donne la pente de la tangente en tout point de la courbe $y = x^2$.

Posons $A(a\,;\,a^2)$ un point sur la courbe. Soit $h \in \mathbb{R}$ et $T(a+h,\,(a+h)^2)$ un point proche de A.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ah+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} = 2a+h$$

pente de la tangente au point A s'appelle le nombre dérivé de $f(x)$ en $x = a$ et est égal à

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$$

La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$