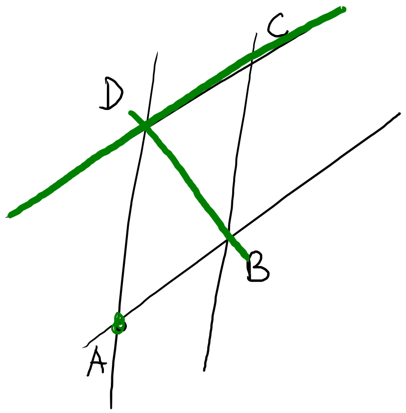
24.04.24

3.1.15 D'un parallélogramme $ABCD$, on donne le sommet $A(8;0)$, l'équation du côté CD : $x-2y+5=0$, ainsi que l'équation de la diagonale BD : $6x-25y=-43$. Déterminer les équations cartésiennes des côtés AB, AD et BC.



(CD) : $x-2y+5=0$

① (AB) : $x-2y+c=0$ $\Rightarrow$ (AB) : $x-2y-8=0$

$A(8;0)$

② Sommet D :

$$\begin{cases} x-2y=-5 & (CD) \\ 6x-25y=-43 & (BD) \end{cases} \Rightarrow D(-3;1)$$

③ (AD) : $\dfrac{y-0}{x-8}=\dfrac{1-0}{-3-8}=\dfrac{1}{-11}$

$1(x-8)=-11(y-0)$

(AD) : $x+11y-8=0$

Deuxième méthode : $\vec{AD}=\vec{OD}-\vec{OA}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\1\end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{l} x=8-11k \\ y=0+k \end{array}\right. \left|\begin{array}{l}\cdot 1\\ \cdot 11\end{array}\right. \Rightarrow x+11y-8=0$$

④ Déterminer B :

$$\begin{cases} x-2y=8 \\ 6x-25y=-43 \end{cases} \Rightarrow B(22;7)$$

⑤ Déterminer BC : $x+11y+c=0 \Rightarrow c=-99$

(BC) : $x+11y-99=0$

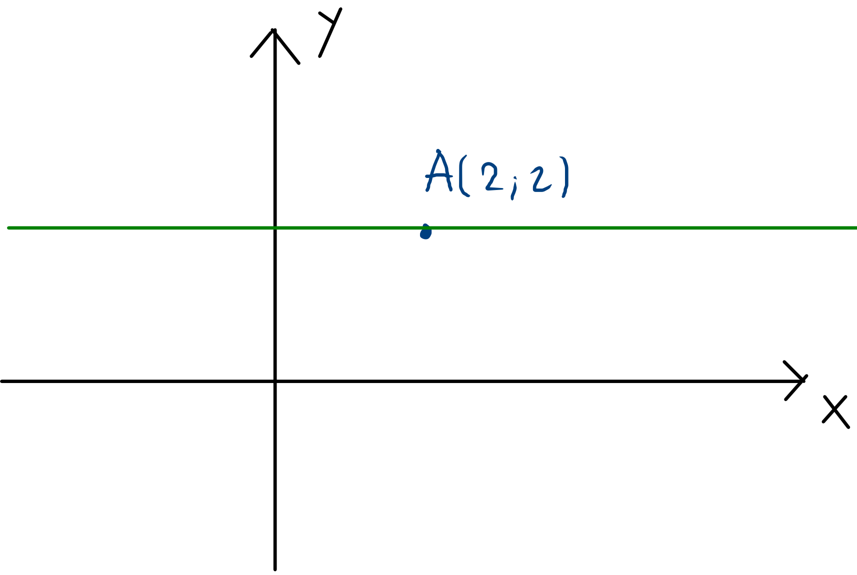
3.1.16

a) Déterminer l'équation cartésienne de la parallèle d_1 à Ox passant par $A(2;2)$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de la parallèle d_2 à Oy passant par $B(6;-4)$.

c) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d_3 passant par $P(1;2)$ et par le milieu du segment d'extrémités A et B.

d) Calculer l'aire du triangle formé par les droites d_1, d_2 et d_3.



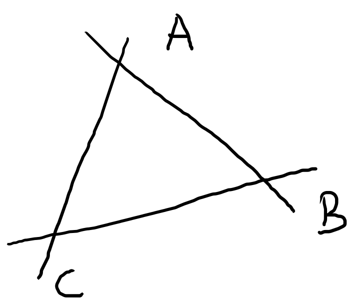
a) $y = 2$

b) $x = 6$

c) $M(4;-1)$

(MP) : ...

d)



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aire } \Delta(ABC) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| d_1 e_2 - e_1 d_2 \right|$$

...

3.1.17 Déterminer l'équation cartésienne de la droite qui passe par $A(2;-3)$ et qui est perpendiculaire à :

a) $3x - 7y + 3 = 0$

b) $x + 9y = 11$

c) $16x = 24y - 7$

d) $2x + 3 = 0$

e) $3y = 1$

$a, b \neq 0$,

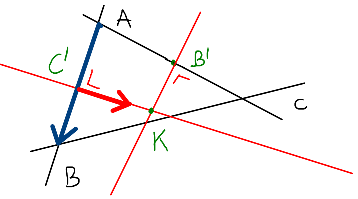
$$\boxed{\begin{array}{c} ax + by + c = 0 \\ \Downarrow \perp \\ bx - ay + k = 0 \end{array}}$$

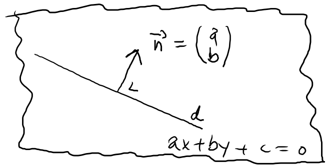
a) $(d) : 3x - 7y + 3 = 0$ $\qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(p) : -7x - 3y + c = 0$

par A : $-14 + 9 + c = 0 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow (d) : 7x + 3y - 5 = 0$

3.1.22 Déterminer les équations cartésiennes des médiatrices du triangle de sommets $A(1;8)$, $B(3;4)$, $C(-6;1)$, ainsi que les coordonnées du centre et le rayon de son cercle circonscrit.





1) Médiatrice de AB : m_{AB}

$C'(2;6)$ milieu de AB

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \perp$ vecteur directeur de m_{AB}

$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n} \perp \vec{m}_{AB}$

(m_{AB}) : $x - 2y + c = 0$

m_{AB} passe par C' : $2 - 12 + c = 0 \Rightarrow c = 10$

(m_{AB}) : $x - 2y + 10 = 0$

2) Médiatrice de AC : $B'\left(-\frac{5}{2} ; \frac{9}{2}\right)$ ou $B'(-2,5 ; 4,5)$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp m_{AC}$

(m_{AC}) : $x + y + c = 0$

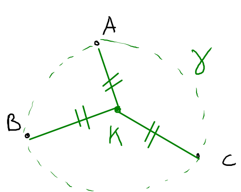
m_{AC} passe par B' : $-2{,}5 + 4{,}5 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

(m_{AC}) : $x + y - 2 = 0$

3) Centre du cercle circonscrit

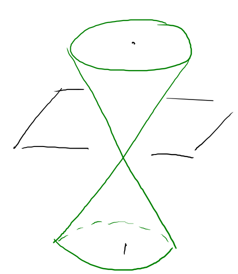
$$\begin{array}{l} (m_{AB}) : \\ (m_{AC}) : \end{array} \begin{cases} x - 2y + 10 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \qquad K(-2;4)$$

4) Rayon du cercle circonscrit



$\|\vec{KA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 5$

$\vec{OA} - \vec{OK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



5) Point $P(a,b) \in$ cercle circonscrit γ

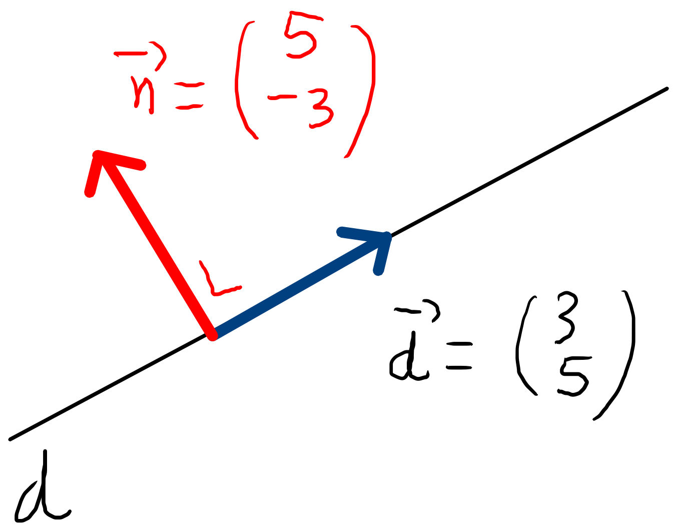
$(a+2)^2 + (b-4)^2 = 25$

$$\boxed{(\gamma) : (x+2)^2 + (y-4)^2 = 25}$$

éq. du cercle de centre $K(-2;4)$ et de rayon 5

Vecteur directeur et vecteur normal

①



$$5x - 3y + 4 = 0 \qquad y = \frac{5}{3}x + \ldots$$

$$m = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

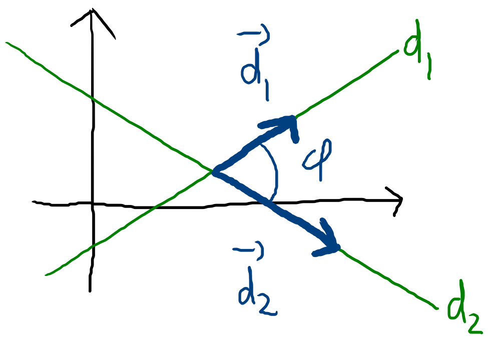
②

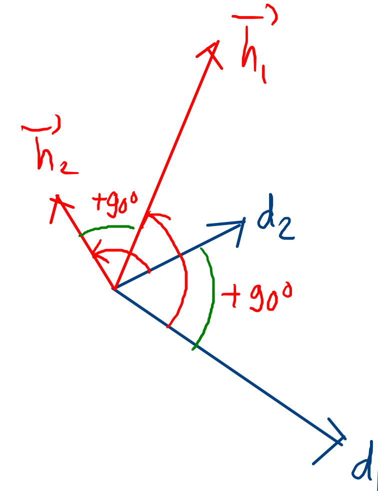
$$7x + 5y + 18 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \perp \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Questions métriques

① Angles entre deux droites





- $$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{d_2}\|}$$

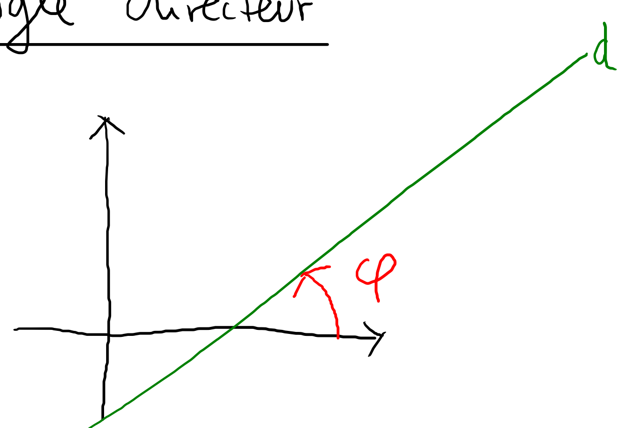
  $\vec{d_1}$ vecteur directeur de d_1 et $\vec{d_2}$ de d_2

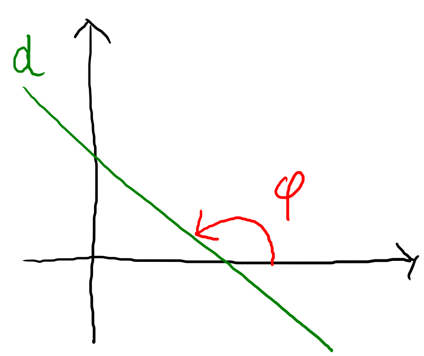
- $$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|}$$

  $\vec{n_1}$ vecteur normal à d_1 et $\vec{n_2}$ à d_2

- $$\tan(\varphi) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

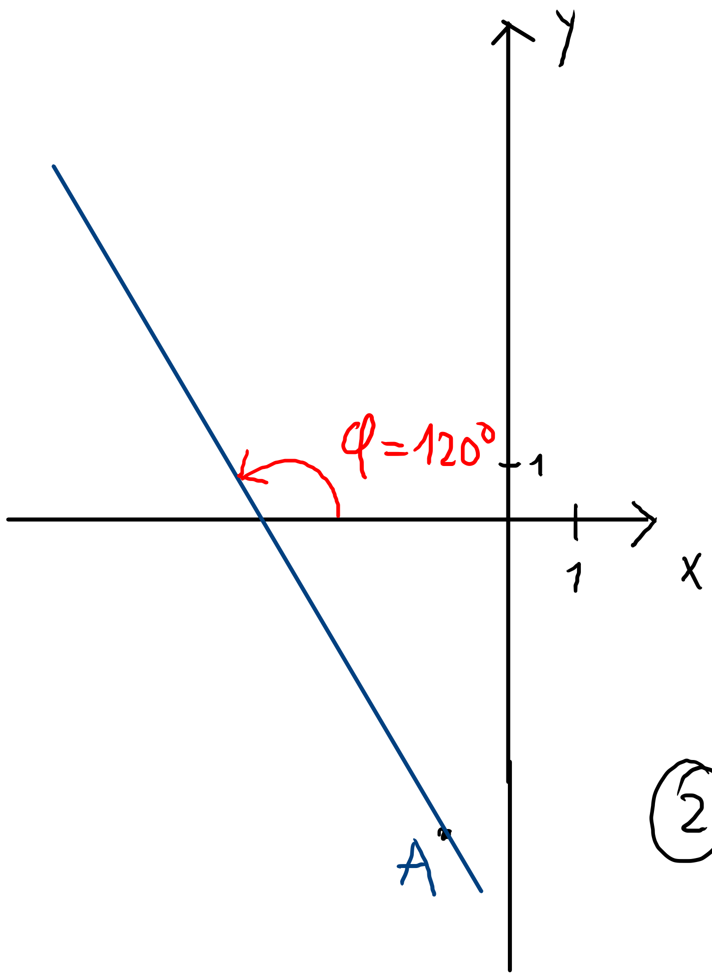
Angle directeur





$$m_d = \tan(\varphi)$$

3.2.1 Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par $A(-1;-5)$ et d'angle directeur 120°.



$$m_d = -\sqrt{3} \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m_d = \frac{-\sqrt{3}}{1}$$

① $(d): \sqrt{3}x + y + c = 0$

② d passe par A : $\sqrt{3}\cdot(-1) + (-5) + c = 0$

$$c = \sqrt{3} + 5$$

$$\boxed{(d): \sqrt{3}x + y + 5 + \sqrt{3} = 0}$$