24.08.23

n) $\left(\frac{63+16i}{4+3i}\right)^2 = (12-5i)^2 = (12-5i)(12-5i) = 144-25-120i$

$= 119-120i$

$$\frac{63+16i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i} = \frac{252+48+(-189+64)i}{16+9} = \frac{300-125i}{25} = \frac{300}{25}-\frac{125}{25}i$$

$$= 12-5i$$

1.1.2 Calculer i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, ... En déduire une formule générale pour i^n, avec $n \in \mathbb{N}$.

$n=0 : i^0 = 1$

$n=1 : i^1 = i$

$n=2 : i^2 = -1$

$n=3 : i^3 = -i$

$n=4 : i^4 = 1$

$n=5 : i^5 = i$

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ i & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Si $n \in \mathbb{N}$: $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$

1.1.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $2z - 3 + i = 0$

b) $(1-4i)z = 6-7i$

c) $(1+2i)z = (5-i)z + 7 + 26i$

c) $(1+2i)\underline{z} - (5-i)\underline{z} = 7 + 26i$

$[(1+2i) - (5-i)]\underline{z} = 7 + 26i$

$[1+2i-5+i]z = 7+26i$

$(-4+3i)\,z = 7+26i \qquad \Big|\ \div(-4+3i)$

$z = \dfrac{7+26i}{-4+3i} \cdot \dfrac{-4-3i}{-4-3i}$

$z = \dfrac{-28+78-21i-104i}{25}$

$z = \dfrac{50-125i}{25} = 2-5i$

$S = \{2-5i\}$

1.1.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w &= 7-4i \\ (1+i)z - iw &= 2+i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2+i)\,z + (2-i)\,w = 7-4i \\ (1+i)\,z - i\,w = 2+i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ (1+i)z - 2 - i = iw \end{cases} \quad \Big| \div i$$

$$\boxed{i \cdot (-i) = -i^2 = 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ \frac{1+i}{i} z + \frac{-2-i}{i} = w \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ \left(\frac{1+i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right) z + \left(\frac{-2-i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right) = w \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ ② \ (-i+1)z + 2i - 1 = w \end{cases}$$

Substituons w dans la 1ère équation :

$$① \ (2+i)z + (2-i)\left[(1-i)z - 1 + 2i\right] = 7-4i$$

$$(2+i)z + (2-i)(1-i)z + (2-i)(-1+2i) = 7-4i$$

$$(2+i)z + (1-3i)z \quad -2+2+5i = 7-4i$$

$$(3-2i)z = 7-9i$$

$$z = \frac{7-9i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{39-13i}{13} = 3-i$$

Calculons w :

$$② \quad w = (1-i)(3-i) - 1 + 2i$$

$$= 2-4i - 1 + 2i = 1-2i$$

Finalement : $z = 3-i$, $w = 1-2i$

1.1.7 Poser $z = x + yi$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

c) $2\,\Im(\bar{z} + 1) + 2i\,\Re(-z + 2) = -1 - 12i$

$$z = x + yi$$

x : partie réelle $\quad \Re(z) = x$

y : partie imaginaire $\quad \Im(z) = y$

a) $8(x + yi) + 5(x - yi) = 4 + 3i$

$$13x + 3yi = 4 + 3i$$

$$\begin{cases} 13x = 4 \\ 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{13} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{4}{13} + i$$